Exercice N° 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points :

$A(0,1,4)$ et $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$.

1.

a. Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$. .... (0,25)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-0\\1-1\\2-4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-0\\5-1\\0-4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$.

D'où :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&4\\-2&-4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&2\\-2&-4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&2\\0&4\end{vmatrix}\vec{k}=8\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}).$$

Conclusion : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

b. En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$. .... (0,5)

L'aire du triangle ABC est

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\right\|=\frac{4}{2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}=2\times\sqrt{9}=6$$ (unité d'aire)

Conclusion : L'aire du triangle ABC est 6 (unité d'aire)

2. Soit D le milieu du segment $[AC]$.

a. Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$. .... (0,25)

On a : D le milieu du segment $[AC]$ donc $D\left(\frac{2+0}{2},\frac{5+1}{2},\frac{0+4}{2}\right)=D(1,3,2)$

$$\overrightarrow{D\Omega}=\begin{pmatrix}3-1\\4-3\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=\frac{1}{4}\times\left(4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\right)=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).$$

Conclusion : $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$

b. En déduire que $d(\Omega(ABC))=3$. .... (0,5)

On a : le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) de même le vecteur $\overrightarrow{D\Omega}$ est normal au plan (ABC) puisque d est le milieu de $[AC]$ donc D est un point du plan (ABC) donc le point D est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC)

D'où : $d(\Omega(ABC))=D\Omega$. (1)

$$= \left\| \overrightarrow{D\Omega} \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \right\| = \frac{1}{4}\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2} \times S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

Conclusion : $d(\Omega(ABC)) = 3$

3. Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$.

a. Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S) . ... (0,5)

1ère méthode :

On a :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} - 9 + \underbrace{y^2 - 8y + 16}_{(y-4)^2} - 16 + \underbrace{z^2 - 8z + 16}_{(z-4)^2} - 16 + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 9 = 3^2$$

La dernière équation représente une équation cartésienne de la sphère de centre le point $\Omega(3,4,4)$ et pour rayon $r = 3$.

Conclusion : la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(3,4,4)$ et pour rayon 3 .

2ième méthode :

- Centre : On a : $a = -6$ et $b = -8$ et $c = -8$ et $d = 32$ donc le centre de la sphère est : $I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right) = I\left(\frac{6}{2}, \frac{8}{2}, \frac{8}{2}\right) = I(3,4,4) = \Omega(3,4,4)$.
- Rayon est : $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 64 + 64 - 128}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Conclusion : la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(3,4,4)$ et pour rayon 3 .

b. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera. ..(0,5)

- Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) :

On a : $d(\Omega(ABC)) = 3$ et le rayon de la sphère est $R = 3$ donc $d(\Omega(ABC)) = R = 3$.

Conclusion : le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) .

- en un point que l'on déterminera.

D'après réponse de la question 2) b- on a la relation (1) qui donne $d(\Omega(ABC)) = D\Omega$: et on a $d(\Omega(ABC)) = 3 = R$.

Conclusion : le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en $D(1,3,2)$ le milieu du segment $[AC]$

4. Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2) . ... (0,5)

Puisque : (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)$

(ou encore le vecteur $2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ est normal au plan (ABC) de même pour les plans (Q_1) et (Q_2).

D'où les deux plans ont une équation de la forme $2x+y+2z+\alpha=0$, on détermine les valeurs de α .

D'autre part : on note le rayon du cercle (C) par $R_C=\sqrt{5}$ et le rayon de la sphère par $R_S=R=3$

on a $(Q_1)\cap(S)=(C)$

- (Q_1) coupe (S) (de même (Q_2) coupe (S)) suivant un cercle de rayon $R_C=\sqrt{R_S{}^2-d^2}$ (1) $R_C=\sqrt{5}$. d est la distance de Ω de chaque plan (Q_1) et (Q_2) donc

  $(1) \Rightarrow d=\sqrt{R_S{}^2-R_C{}^2}=\sqrt{3^2-\sqrt{5}^2}=2$.

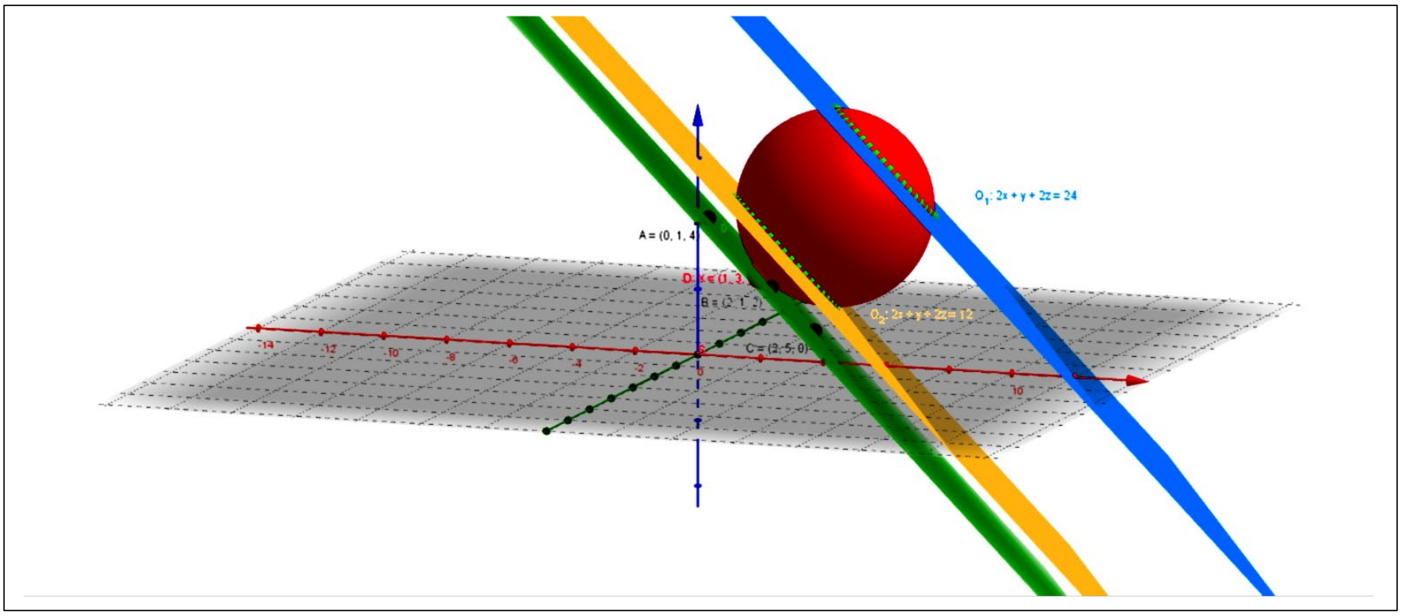
- Donc : $d=d(\Omega,Q_1)=d(\Omega,Q_2)=\dfrac{|2x_\Omega+y_\Omega+2z_\Omega+\alpha|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{|2\times3+1\times4+2\times4+\alpha|}{3}=2$ (2)

  D'où : (2) $\Rightarrow |18+\alpha|=6$

  $\Rightarrow 18+\alpha=6$ ou $18+\alpha=-6$

  $\Rightarrow \alpha=-12$ ou $\alpha=-24$

Conclusion : équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2) sont : $2x+y+2z-12=0$ et $2x+y+2z-24=0$



Exercice N° 2

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $\left(0,\vec{u},\vec{v}\right)$, On considère les points A et B , C et D d'affixes respectives ω et a et b telles que $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}+i$, $c=\overline{b}$ et $d=2i$.

1. Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique. ………………………………………………… (0,25)

On a : $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Conclusion : a sous forme trigonométrique $a = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[2, \frac{\pi}{4}\right]$.

2.

a. Vérifier que $b - d = c$. ……………………………………………………………… (0,25)

On a : $b - d = 1 + \sqrt{2} + i - 2i$

$$= 1 + \sqrt{2} - i$$

$$= \overline{1 + \sqrt{2} + i}$$

$$= \overline{b} = c$$

Conclusion : $b - d = c$.

b. Montrer que : $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b - d$ en déduire que les points A , B et D sont alignés . ……….. (0,5)

- Montrer que : $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b - d$.

On a : $(\sqrt{2}+1)(b-a) = (\sqrt{2}+1)\left(1+\sqrt{2}+i-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\right)$

$$= (\sqrt{2}+1)\left(1 + \cancel{\sqrt{2}} + i - \cancel{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\right)$$

$$= (\sqrt{2}+1)\left(1 + i\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$$

$$= (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}+1)\left(i - i\sqrt{2}\right)$$

$$= (\sqrt{2}+1) + \cancel{i\sqrt{2}} - 2i + i - \cancel{i\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} + 1 - i \quad ; \left(\text{ou encore } \sqrt{2}+1-i = \underbrace{\sqrt{2}+1+i}_{=b} - \underbrace{2i}_{=d} = b - d\right)$$

$$= \overline{b} = c = b - d$$

Conclusion : $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b - d$.

- En déduire que les points A , B et D sont alignés .

1ère méthode :

On a : $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b - d$ donc $(\sqrt{2}+1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

Conclusion : les points A , B et D sont alignés .

2ième méthode :

On a : $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b - d$ donc $\frac{b-a}{b-d} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \in \mathbb{R}$.

Conclusion : les points A , B et D sont alignés .

3.

a. Vérifier que : $ac = 2b$. ……………………………………………………………… (0,25)

On a : $ac=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\overline{1+\sqrt{2}+i}\right)$

$=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}-i\right)$

$=\sqrt{2}+2-\cancel{i\sqrt{2}}+\cancel{i\sqrt{2}}+2i+\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}+2+2i$

$=2\left(\sqrt{2}+1+i\right)$

$=2b$

Conclusion : $\boxed{ac=2b}$.

b. En déduire que $2\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ . ... (0,5)

- On a : $a=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[2,\frac{\pi}{4}\right]$ donc $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- On a : $c=\overline{b}$ donc $\arg(c)\equiv\arg\left(\overline{b}\right)\ [2\pi]$

$\equiv-\arg(b)\ [2\pi]$

- D'où : $\arg(ac)\equiv\arg(a)+\arg(c)\ [2\pi]$

$\arg(2b)\equiv\frac{\pi}{4}-\arg(b)\ [2\pi]$; $\left(\text{car } ac=2b \text{ et } \arg(a)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right)$

$\arg(2)+\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}-\arg(b)\ [2\pi]$

$0+\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}-\arg(b)\ [2\pi]$

$2\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Conclusion : $\boxed{2\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]}$.

4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' .

a. Montrer que $z'=\frac{1}{2}az$ . ... (0,25)

- L'écriture complexe de la rotation R est de la forme : $z'-\omega=(z-\omega)e^{i\theta}$.

(avec $\omega=0$ est l'affixe du point O centre de la rotation et $\theta=\frac{\pi}{4}$ est l'angle de la rotation R) .

D'où $z'-0=(z-0)e^{i\frac{\pi}{4}}\ (1)$

$z'=z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\begin{array}{l} e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \quad =\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$

$z' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$

$z' = \frac{1}{2}az$

Conclusion : L'écriture complexe de la rotation R est $z' = \frac{1}{2}az$.

b. En déduire que $R(C) = B$ et $R(A) = D$. ……………………………………………………………… (0,5)

On pose que C' d'affixe c' est l'image de C par R

Donc : $R(C) = C' \Leftrightarrow c' = \frac{1}{2}ac$

$\Leftrightarrow c' = \frac{1}{2} \times 2b$

$\Leftrightarrow c' = b$

$\Leftrightarrow C' = B$

D'où : $c' = b$ par suite $C' = B$.

Conclusion : l'image du point C par la rotation R est B

On pose que A' d'affixe a' est l'image de A par R

Donc : $R(A) = A' \Leftrightarrow a' = \frac{1}{2}aa$

$\Leftrightarrow a' = \frac{1}{2} \times \left[2, \frac{\pi}{4}\right]^2 \left(\text{ou encore : } \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 4i = 2i = d\right)$

$\Leftrightarrow a' = \frac{1}{2} \times \left[2^2, 2 \times \frac{\pi}{4}\right]$

$\Leftrightarrow a' = \frac{1}{2} \times \left[4, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow a' = \frac{1}{2} \times 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + +i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow a' = 2i$

$\Leftrightarrow a' = d$

$\Leftrightarrow A' = D$

D'où : $a' = d$ par suite $A' = D$.

Conclusion : l'image du point A par la rotation R est D

c. Montrer que : $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$ puis en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$. …………… (0,5)

1ère méthode :

On a :

- On a d'après question 3) a) : $2b = ac$ (1).
- $R(A) = D \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}aa$ donc $2d = a^2$ (2) .

- D’après (1) et (2) on obtient : $2b-2d=ac-a^2=a(c-a)$ d’où : $(b-d)\frac{2}{a}=c-a$ (3) .

- Par suite : $\frac{b-a}{c-a}=\frac{b-a}{(b-d)\frac{2}{a}}$ d'après (3)

$$=\frac{b-a}{b-d}\times\frac{a}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{a}{2}\ ;\ \left(\text{car } \left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d\ ;\ \text{d'après question 2) b)}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\times\frac{a}{2}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\times\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$$

Conclusion : $\boxed{\frac{b-a}{c-a}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a}$

2ième méthode :

On a : $\frac{b-a}{c-a}=\frac{\left(1+\cancel{\sqrt{2}}+i\right)-\left(\cancel{\sqrt{2}}+i\sqrt{2}\right)}{\left(1+\cancel{\sqrt{2}}-i\right)-\left(\cancel{\sqrt{2}}+i\sqrt{2}\right)}$

$$=\frac{1+\left(1-\sqrt{2}\right)i}{1-\left(1+\sqrt{2}\right)i}$$

$$=\frac{\left(1+\left(1-\sqrt{2}\right)i\right)\left(1+\left(1+\sqrt{2}\right)i\right)}{\left(1-\left(1+\sqrt{2}\right)i\right)\left(1+\left(1+\sqrt{2}\right)i\right)}$$

$$=\frac{1+\left(1+\sqrt{2}\right)i+\left(1-\sqrt{2}\right)i-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1+2i-(1-2)}{1+\left(3+2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{2+2i}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{2\cancel{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$=\frac{a}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)a}{2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)a}{2(2-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}a=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$$

Conclusion : $\boxed{\frac{b-a}{c-a}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a}$

3ième méthode :

- Montrer que : $\frac{b-a}{c-a}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$:

D'après question 2) a) on a $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(b-a\right)=b-d$ donc $b-a=\dfrac{b-d}{\sqrt{2}+1}$ (3)

D'où : $\dfrac{b-a}{c-a}=\dfrac{b-d}{\sqrt{2}+1}\times\dfrac{1}{c-a}$; d'après (3)

$$=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(b-d\right)}{\underbrace{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}_{=1}}\times\frac{1}{c-a}\times\frac{a}{a}$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(b-d\right)\times\frac{a}{ca-a^2}$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(b-d\right)\times\frac{a}{2b-4i}\ ;\ \left(ac=2b \text{ question3)a) et } a^2=\left[2,\frac{\pi}{4}\right]^2=\left[4,\frac{\pi}{2}\right]=4i\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(b-d\right)\times\frac{a}{2\left(b-2i\right)}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\cancel{\left(b-d\right)}\times\frac{a}{\cancel{\left(b-d\right)}}\ ;\ \left(d=2i\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{b-a}{c-a}=\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a}$

- **En déduire une mesure de l'angle $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$:**

On a : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv\arg\left(\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv\arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+\arg\left(a\right)\ [2\pi]\ ;\ \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}>0\right)$$

$$\equiv 0+\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

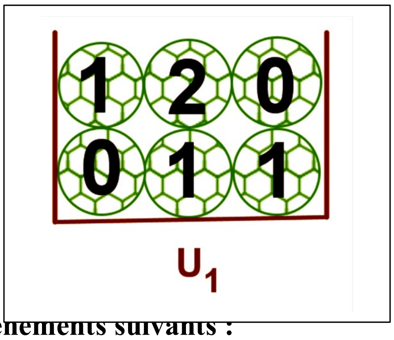
$$\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

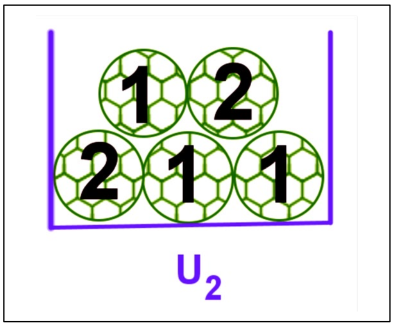
Conclusion : $\boxed{\text{une mesure de l'angle } \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \text{ est } \frac{\pi}{4}.}$

Exercice N° 3

Une urne U_1 contient 6 boules portant les nombres 0 ; 0 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne contient cinq boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 2 ; 2 .
On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher :

On considère l'expérience aléatoire suivante :
« On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2 ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ».





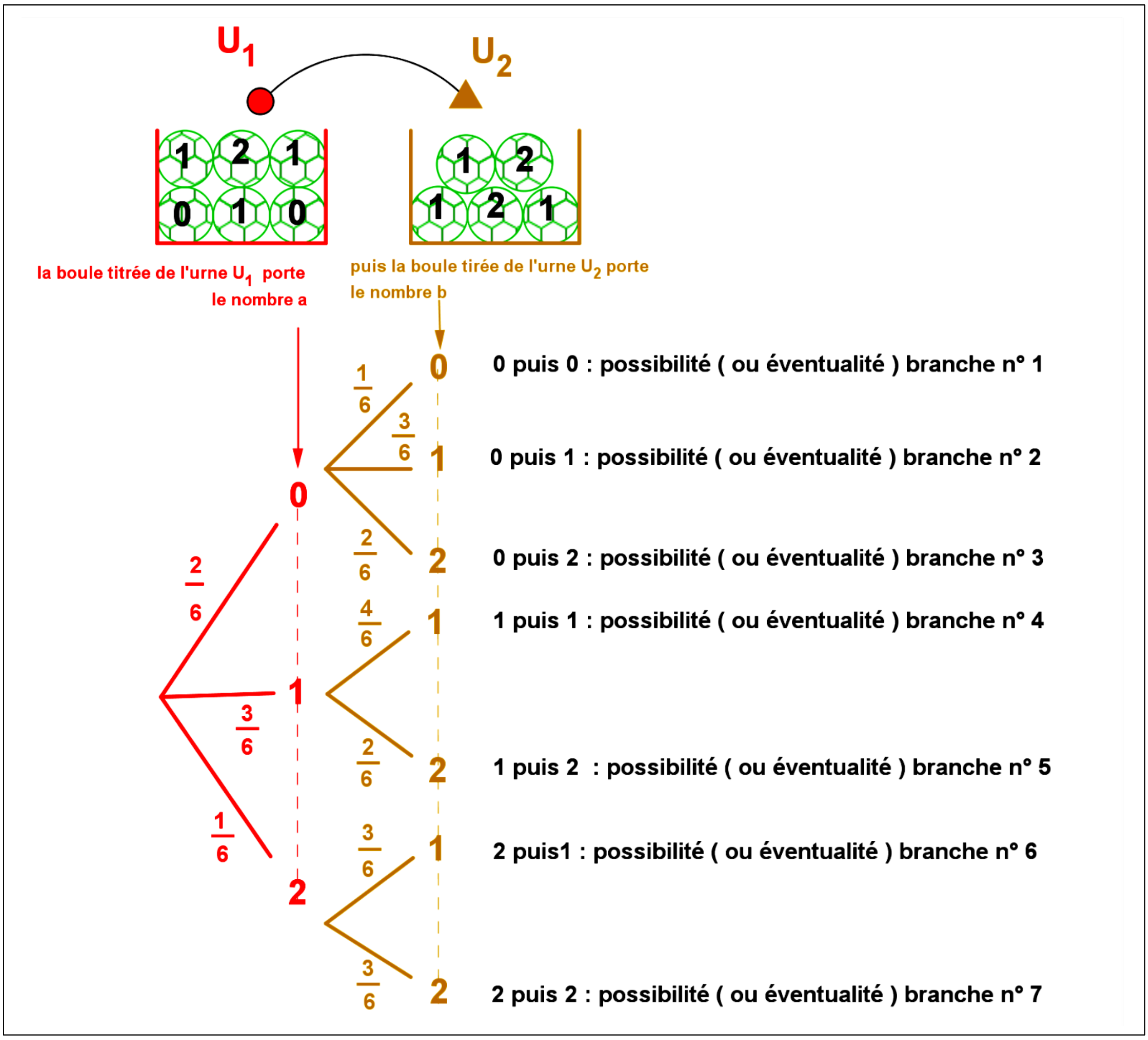
On considère les événements suivants :

- ❖ L'événement A « la boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1 »
- ❖ L'événement B « le produit ab est égal à 2 »

1. .

a. Calculer $p(A)$ la probabilité de l'événement A . ……………………………………..………….………….(0,5)

1ère méthode (en utilisant l'arbre) :



❖ L'événement A « la boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1 »
D'après l'arbre : l'événement A « la branche n° 4 ou la branche n° 5 »
Donc : $p(A)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{6}\times\left(\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\right)=\frac{3}{6}\times1=\frac{1}{2}$

Conclusion : $p(A)=\frac{1}{2}$

2$^{\text{ième}}$ méthode :
La boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1.
On a : l'urine U_1 contient 6 boules dont 3 boules portent le nombre 1 donc sa probabilité est $\frac{3}{6}$ et puisque on ne s'intéresse pas au nombre de la boule tirée de l'urine U_2 donc la probabilité de la boule tire de l'urine U_2 est 1 (événement certain)

Conclusion : $p(A)=\frac{3}{6}\times1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

b. Montrer que : $p(B)=\frac{1}{4}$. (on peut utiliser l'arbre des possibilités) ……………………...…….. (0,5)

1$^{\text{ère}}$ méthode (en utilisant l'arbre) :

❖ L'événement B « le produit ab est égal à 2 »
D'après l'arbre : L'événement A « la branche n° 5 ou la branche n° 6 »
Donc : $p(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{6}\times\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Conclusion : $p(B)=\frac{1}{4}$

2$^{\text{ième}}$ méthode :

Ou encore B « la 1$^{\text{ère}}$ boule porte tirée de l'urine U_1 le nombre 1 et la 2$^{\text{ième}}$ boule tirée de l'urine U_2 porte le nombre 2 ou la 1$^{\text{ère}}$ boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 2 et la 2$^{\text{ième}}$ boule tirée de l'urine U_2 porte le nombre 1 »

- La 1$^{\text{ère}}$ boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1 sa probabilité est $\frac{3}{6}=p(A)$ et la 2$^{\text{ième}}$ boule tirée de l'urine U_2 porte le nombre 2 sachant que la 1$^{\text{ère}}$ boule met dans l'urne U_2 porte le nombre 1 sa probabilité est $\frac{2}{6}$ donc $\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}$.
- La 1$^{\text{ère}}$ boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 2 sa probabilité est $\frac{1}{6}$ et la 2$^{\text{ième}}$ boule tirée de l'urine U_2 porte le nombre 1 sachant que la 1$^{\text{ère}}$ boule met dans l'urne U_2 porte le nombre 2 sa probabilité est $\frac{3}{6}$ donc $\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$.

Conclusion : $p(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{3\times2+1\times3}{6\times6}=\frac{9}{36}=\frac{\cancel{9}\times1}{\cancel{9}\times4}=\frac{1}{4}$

2. Calculer $p(A/B)$; la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé . ……..(0,75)
1$^{\text{ère}}$ méthode (en utilisant l'arbre) :

❖ On sait que : $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

❖ L'événement $A\cap B$ « (La 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1) et (le produit ab est égal à 2) »
D'après l'arbre : L'événement $A\cap B$ « la branche n° 5 »
Donc : $p(A\cap B)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

D'où : $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

Conclusion : $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{2}{3}$

2ième méthode :

- Calculons $p(A\cap B)$:

L'événement $A\cap B$ « (la boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1) et (le produit ab est égal à 2) »
Ou encore $A\cap B$ « (la boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1) et la 2ième boule tirée de l'urine U_2 porte le nombre 2 »
On a :

❖ La boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1 sa probabilité est $\dfrac{3}{6}$.

❖ La 2ième boule tirée de l'urine U_2 porte le nombre 2 sa probabilité est $\dfrac{2}{6}$

Donc $p(A\cap B)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Conclusion : $p(A\cap B)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{6}$

D'où : $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Conclusion : $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{2}{3}$

3. Soit X la variable aléatoire « qui associe à chaque résultat de l'expérience le produit ab » .

a. Montrer que : $p(X=0)=\dfrac{1}{3}$. ....(0,25)

1ère méthode (en utilisant l'arbre) :

❖ L'événement $X=0$ « le produit ab est égal à 0 »
D'après l'arbre : L'événement $X=0$ « la branche n° 1 ou la branche n° 2 ou la branche n° 3 »
Donc : $p(X=0)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{6}\times\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}\right)=\dfrac{2}{6}\times1=\dfrac{1}{3}$

Conclusion : $p(X=0)=\dfrac{1}{3}$

2ième méthode :

L'événement $X=0$ « (la 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 0) et (la 2ième boule de l'urine U_2 porte n'importe quel nombre »

- La 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 0 sa probabilité est $\frac{2}{6}$.
- La 2ième boule de l'urine U_2 porte n'importe quel nombre sa probabilité est $\frac{6}{6}$.

Donc : $p(X=0)=\frac{2}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{1}{3}$.

Conclusion : $\boxed{p(X=0)=\frac{1}{3}}$.

b. Donner la loi de probabilité de X (remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4) (0,5)

1ère méthode (en utilisant l'arbre) :

- L'événement $X=0$: on a : $p(X=0)=\frac{1}{3}$ (question 3) a))
- L'événement $X=1$:
  D'après l'arbre : L'événement $X=1$ « la branche n° 4 »
  Donc : $p(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{3}=\frac{1}{3}$
  Conclusion : $p(X=1)=\frac{1}{3}$
- L'événement $X=2$:
  On remarque que $X=2$ est l'événement B donc $p(X=2)=p(B)=\frac{1}{4}$.
- L'événement $X=4$:
  D'après l'arbre : L'événement $X=4$ « la branche n° 7 »
  Donc : $p(X=4)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
  Conclusion : $p(X=4)=\frac{1}{12}$

Conclusion : la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

x_i	0	1	2	4	total
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	1

2ième méthode :

- L'événement $X=0$: on a : $p(X=0)=\frac{1}{3}$ (question 3) a))
- L'événement $X=1$:
  On a $X=1$ « (la 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1) et (la 2ième boule tirée porte le nombre 1 »
  - La 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 1 sa probabilité est $\frac{3}{6}$.
  - La 2ième boule tirée porte le nombre 1 sa probabilité est $\frac{4}{6}$ (car la 1ère boule tirée de l'urine U_1

porte le nombre 1 on la met dans l'urne U_2).

- $p(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$

❖ L'événement $X=2$: on remarque que $X=2$ est l'événement B donc $p(X=2)=p(B)=\frac{1}{4}$

❖ L'événement $X=4$:

On a $X=4$ « (la 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 2) et (la 2ième boule tirée porte le nombre 2 »

- La 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 2 sa probabilité est $\frac{1}{6}$.
- La 2ième boule tirée porte le nombre 2 sa probabilité est $\frac{3}{6}$ (car la 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte le nombre 2 on la met dans l'urne U_2).
- $p(X=4)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$

Conclusion : la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

x_i	0	1	2	4	total
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	1

c. On considère les évènements : ……………………………………………………………………… (0,5)
M « le produit ab est pair non nul » et N « le produit ab est égal à 1 »
On montrer que : les événements M et N sont équiprobables

1ère méthode (en utilisant l'arbre) :

❖ L'événement N « le produit ab est égal à 1 » ou encore $N=(X=1)$ donc $p(N)=p(X=1)=\frac{1}{3}$.

❖ L'événement M « le produit ab est pair non nul »
D'après l'arbre : L'événement M « la branche n° 5 ou la branche n° 6 ou la branche n° 7 »
Donc : $p(M)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{36}\times(6+3+3)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

Conclusion : $p(M)=\frac{1}{3}$

Remarque :
L'événement M « (la branche n° 5 ou la branche n° 6) ou (la branche n° 7) »
L'événement M « $(X=2)$ ou $(X=4)$ »
Donc : $M=(X=2)$ ou $(X=4)$

D'où : $p(M)=p((X=2)\text{ ou }(X=4))=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Donc : $p(M)=p(N)=\frac{1}{3}$

Conclusion : les événements M et N sont équiprobables.

2ième méthode :

❖ On calcule $p(M)$:

Ou encore M « (la 1ère boule porte tirée de l'urine U_1 porte un nombre impair (c'est-à-dire 1) et la 2ième boule tirée de l'urine U_2 porte un nombre pair (c'est-à-dire 1) ou (la 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte un nombre pair non nul (c'est-à-dire 2) et la 2ième boule tirée de l'urine U_2 porte le nombre impair (c'est-à-dire 1) ou (la 1ère boule porte tirée de l'urine U_1 porte un nombre pair non nul (c'est-à-dire 2) et la 2ième boule tirée de l'urine U_2 porte un nombre pair (c'est-à-dire 2) »

- La 1ère boule porte tirée de l'urine U_1 porte un nombre impair (c'est-à-dire 1) et la 2ième boule tirée de l'urine U_2 porte un nombre pair (c'est-à-dire 1) donc sa probabilité est $\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$.
- La 1ère boule tirée de l'urine U_1 porte un nombre pair non nul (c'est-à-dire 2) et la 2ième boule tirée de l'urine U_2 porte le nombre impair (c'est-à-dire 1) sa probabilité est $\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$.
- La 1ère boule porte tirée de l'urine U_1 porte un nombre pair non nul (c'est-à-dire 2) et la 2ième boule tirée de l'urine U_2 porte un nombre pair (c'est-à-dire 2) sa probabilité est $\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$
- Donc : $p(M)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

❖ On calcule $p(M)$:

N « le produit ab est égal à 1 » On a : $p(N)=p(X=1)=\frac{1}{3}$

Donc : $p(M)=p(N)$

Conclusion : les événements M et N sont équiprobables.

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$.

Soit (C_f) sa courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. ..

a. Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$: $f(x)=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$. .... (0,25)

On a : $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

$$=\frac{2x-2}{x}+1-2\ln x+(\ln x)^2$$

$$=\frac{2x-2+x-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

$$=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

Conclusion : pour tout $x\in]0,+\infty[$: $f(x)=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$.

b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2 = 0$. et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (on peut poser $t=\sqrt{x}$ …………………….. (0, 5)

- $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2 = 0$:

1ère méthode :

on pose $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$; $\begin{cases} x\mapsto 0^+ \\ t\mapsto 0^+ \end{cases}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2 &= \lim_{t\to0^+} t^2\left(\ln\left(t^2\right)\right)^2 \\ &= \lim_{t\to0^+} t^2\left(2\ln(t)\right)^2 \\ &= \lim_{t\to0^+} 4\left(t\ln(t)\right)^2 \\ &= 0 \qquad ; \left(\lim_{t\to0^+} t\ln t = 0 \text{ propriété}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2 = 0$.

2ième méthode :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2 &= \lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2 \\ &= \lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\right)^2\left(2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} 4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2 \\ &= \lim_{t\to0^+} 4(t\ln t)^2 \quad ; \left(\text{on pose } t=\sqrt{x} \; ; \begin{cases} x\mapsto 0^+ \\ t\mapsto 0^+ \end{cases}\right) \\ &= 0 \qquad ; \left(\lim_{t\to0^+} t\ln t = 0\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2 = 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln t^2\right)^2}{t^2} \quad ; \left(\text{on pose } t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \; ; \begin{cases} x\mapsto 0^+ \\ t\mapsto 0^+ \end{cases}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2\ln t)^2}{t^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \\ &= 0 \qquad ; \left(\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0 \text{ propriété}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$.

c. Déduire que : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat . ……(0, 5)

- Déduire que : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} \underbrace{3x-2}_{\to-2}-2\underbrace{x\ln x}_{\to0}+\underbrace{x(\ln x)^2}_{\to0}=-2$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}=-\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

- Une interprétation géométrique du résultat

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ on conclue que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ (ou bien l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentative (C)).

d. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ ………………………………………………………… (0,75)

- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2=+\infty\ ;\ \text{car}\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{2}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln x=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2=+\infty\end{cases}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- La courbe (C_f) admet une branche parabolique :

$$\text{On calcule}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}=0\ ;\ \text{car}\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\ ;\ (\text{propriété})\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0\ ;\ \text{question 1) b)}\end{cases}$$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Conclusion : La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ou une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=0$) au voisinage de $+\infty$.

2. Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$; $f'(x)=\dfrac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$ . ... (0,5)

❖ La fonction : $x\mapsto 2-\dfrac{2}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$.

❖ La fonction : $x\mapsto \ln x$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$.

❖ Donc la fonction $x\mapsto f(x)=2-\dfrac{2}{x}+(1-\ln x)^2$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$.

On a : $f'(x)=\left(2-\dfrac{2}{x}+(1-\ln x)^2\right)'$

$$=0+2\frac{1}{x^2}+2(1-\ln x)'(1-\ln x)$$

$$=\frac{2}{x^2}+2\times\left(\frac{-1}{x}\right)(1-\ln x)$$

$$=\frac{2}{x^2}+2\times\frac{(1-\ln x)}{x^2}$$

$$=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$$

Conclusion : pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$; $f'(x)=\dfrac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$.

3. En exploitant le tableau de variations ci-dessous de la fonction f' de f sur $\left]0,+\infty\right[$.

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$f(\beta)$	↘	0

(On donne $\beta=4,9$)

a. Prouver que : f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ puis donner le tableau de variations de f . (0,5)

- f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$:

D'après le tableau de variations ci-dessus de la fonction f' de f sur $\left]0,+\infty\right[$

On déduit que :

❖ Pour tout x de $\left]0,1\right]$ on a $f'(\left]0,1\right])=\left[0,+\infty\right[$ donc $f'(x)\geq 0$ sur $\left]0,1\right]$.

❖ Pour tout x de $[1,\beta]$ on a $f'([1,\beta])=[1,f(\beta)]=[1;4,9]$ donc $f'(x)\geq 0$ sur $[1,\beta]$.

❖ Pour tout x de $\left[\beta,+\infty\right[$ on a $f'(\left[\beta,+\infty\right[)=\left[f(\beta),+\infty\right[=\left]0;4,9\right]$ donc $f'(x)\geq 0$ sur $\left[\beta,+\infty\right[$.

❖ On remarque que $f'(1)=0$

❖ Donc pour tout x $\left]0,+\infty\right[$ on a $f'(x)\geq 0$ juste $f'(1)=0$.

❖ D'où : la fonction f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

- Donner le tableau de variations de f :

x	0			1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0,+\infty[$. ……………….. **(0, 5)**

En exploitant le tableau de variations ci-dessous de la fonction f' de f sur $]0,+\infty[$ on a :

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖ 0	f' est décroissante	0	f' est croissante	$f(\beta)$	f' est décroissante	
Signe de $f''(x)$	‖	f'' est négative	0	f'' est positive	$f''(\beta)=0$	f'' est négative	

- Le signe de la fonction f' est :

❖ Pour tout x de $]0,1]$ on a : $f'(x)\geq 0$ et décroissante sur $]0,1]$ donc sa fonction dérivée est $f''(x)\leq 0$ sur $]0,1]$.

❖ Pour tout x de $[1,\beta]$ on a : $f'(x)\geq 0$ et croissante sur $[1,\beta]$ donc sa fonction dérivée est $f''(x)\geq 0$ sur $[1,\beta]$.

❖ Pour tout x de $[1,+\infty[$ on a : $f'(x)\geq 0$ et croissante sur $[1,+\infty[$ donc sa fonction dérivée est $f''(x)\geq 0$ sur $[1,+\infty[$.

❖ Juste $f''(1)=0$ et $f''(\beta)=0$.

❖ **Remarque :** d'après tableau de variations de f' on a un maximum au point d'abscisses $x_0=\beta$ donc la dérivée de f' (ou encore f'') au point d'abscisses $x_0=\beta$ s'annule ou encore $f''(\beta)=0$.

c. Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexions .. **(1)**

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖ 0	f' est décroissante	0	f' est croissante	$f(\beta)$	f' est décroissante	
Signe de $f''(x)$	‖	f'' est négative	0	f'' est positive	$f''(\beta)=0$	f'' est négative	
Concavité	‖	$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Conséquence :

- La fonction f'' dérivée seconde de f s'annule en $x_0=1$ et change de signe au voisinage de $x_0=1$. Ou encore la concavité de la courbe change au voisinage de $x_0=1$ et $f''(1)=0$.

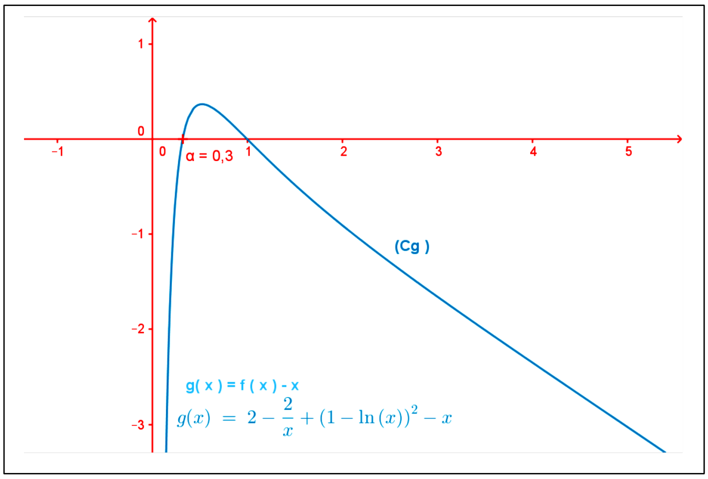
Conclusion 1 : le point $I(1,f(1)) = I(1,1)$ est un point d'inflexion à la courbe (C_f) de f .

- La fonction f'' dérivée seconde de f s'annule en $x_1 = \beta$ et change de signe au voisinage de $x_1 = \beta$ Ou encore la concavité de la courbe change au voisinage de $x_1 = \beta$ et $f''(\beta) = 0$ car f' admet un extremum (maximum) au point $x_1 = \beta$

Conclusion 2 : le point $J(\beta, f(\beta))$ est un point d'inflexion à la courbe (C_f) de f

4. La courbe (C_g) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ qui s'annule en α et 1 avec $\alpha \approx 0,3$

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.



a. À partir de la courbe (C_g) déterminer le signe de la fonction g sur $]0,+\infty[$. ……………..……… (0,5)

- Le signe de la fonction g est :

❖ Pour tout x de $]0,\alpha[$ on a : la courbe de g est située strictement au-dessous de l'axe des abscisses. Donc Pour tout x de $]0,\alpha[$; $g(x) < 0$.

❖ Pour tout x de $]\alpha,1[$ on a : la courbe de g est située strictement au-dessus de l'axe des abscisses. Donc Pour tout x de $g(x) > 0$.

❖ Pour tout x de $]1,+\infty[$ on a : la courbe de g est située strictement au-dessous de l'axe des abscisses. Donc Pour tout x de $]1,+\infty[$; $g(x) < 0$.

❖ Pour $x = \alpha$ et $x = 1$ la courbe de g coupe l'axe des abscisses donc $g(1) = 0$ et $g(\alpha) = 0$.

D'où le signe de g est donné par le tableau suivant :

x	0		α		1		$+\infty$
Signe de $g(x)$	‖	-	0	+	0	-	
Signe de $g(x)$	‖	g est négative	0	g est positive	0	g est négative	

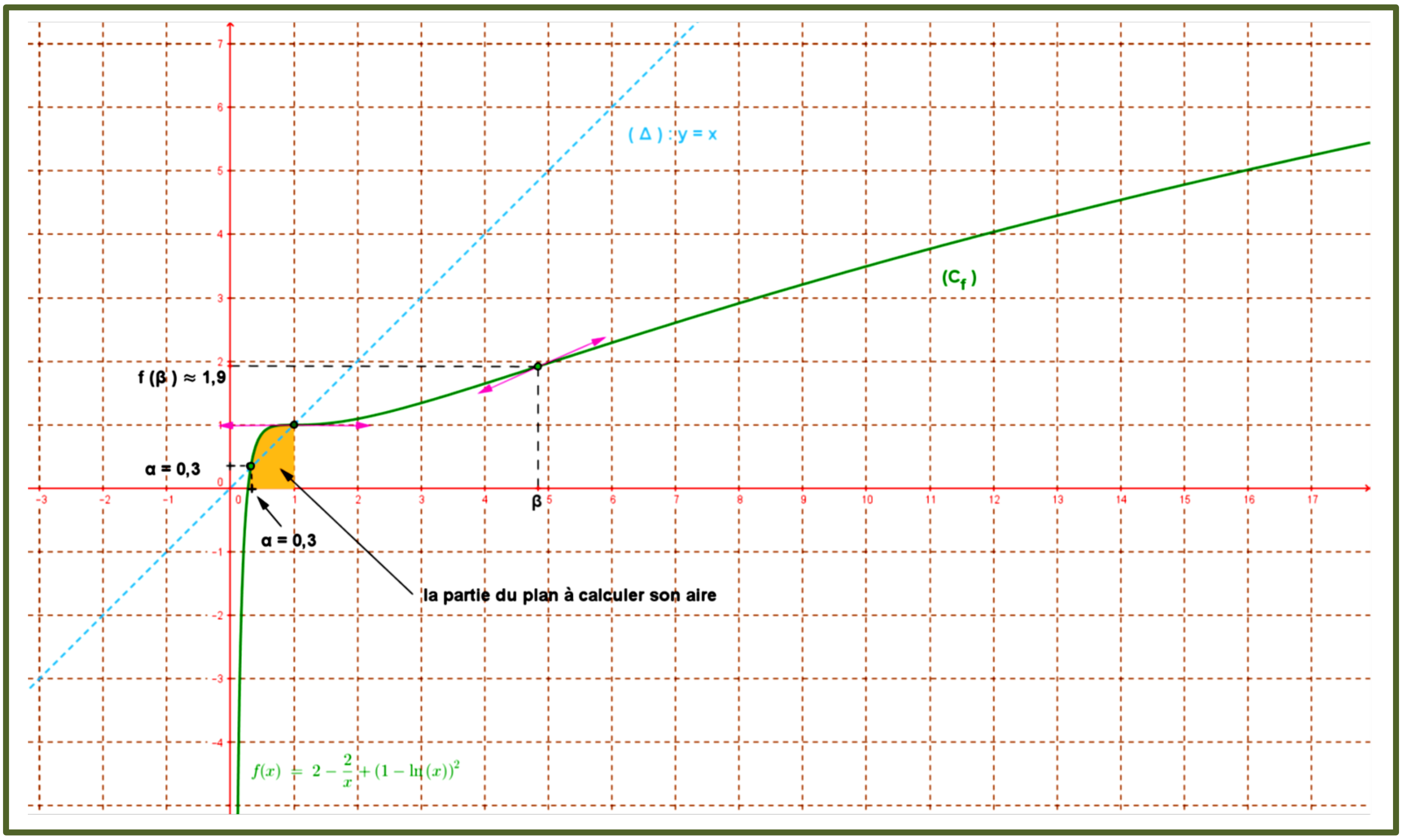
b. Déduire que la droite (Δ) est en dessous de (C_f) sur l'intervalle $[\alpha,1]$ et au-dessus de (C_f) sur les intervalles $]0,\alpha]$ et $[1,+\infty[$. ……………………………………………………………...…….....…… (0,5)

- La position relative de (C) et la droite (Δ) est :

- Sur $]0,\alpha]$ et $[1,+\infty[$ on a : $g(x)=f(x)-x\leq 0$ donc $f(x)\leq x$ La courbe (C_f) de f est située au-dessous de la droite (Δ) sur chaque des intervalles $]0,\alpha]$ et $[1,+\infty[$.
- sur $[\alpha,1]$ on a : $g(x)=f(x)-x\geq 0$ donc $f(x)\geq x$ La courbe (C_f) est située au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $[\alpha,1]$
- Puisque $g(x)=f(x)-x=0$ donc $f(x)=x$ pour les valeurs $x_0=\alpha$ et $x_1=1$ donc la courbe (C_f) de f coupe la droite (Δ) en deux points $A(1,f(1))=A(1,1)$ et $B(\alpha,f(\alpha))=B(\alpha,\alpha)$
- **Remarque :** on peut donner la conclusion sous forme d'un tableau

x	0		α		1		$+\infty$
Le signe de $g(x)=f(x)-x$	‖	−	0	+	0	−	
Position relative de l (C_f) et (Δ) sur $]0,+\infty[$		(C_f) est au-dessous de (Δ)		(C_f) est au-dessus de (Δ)		(C_f) est au-dessous de (Δ)	
			(C_f) et (Δ) se coupent au point $A(1,f(1))=A(1,1)$		(C_f) et (Δ) se coupent au point d'abscisse $B(\alpha,f(\alpha))=B(\alpha,\alpha)$		

5. Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) et dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prendra $\alpha\approx 0,3$, $\beta\approx 4,9$ et $f(\beta)=1,9$) . ... (1, 5)



6.

a. Vérifier que la fonction $x \mapsto 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1-\ln x$ sur $[\alpha,1]$ … (0,5)

- **On vérifie :**

Pour cela on montre que : $H'(x)=h(x)$ avec : $H(x)=2x-x\ln x$ et $h(x)=1-\ln x$

On a : $H'(x)=(2x-x\ln x)'$

$$=2-\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)=2-\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=2-\ln x-1=1-\ln x=h(x)$$

Donc $H'(x)=h(x)$.

Conclusion : $H : x\mapsto 2x-x\ln x$ est une fonction primitive de $h : x\mapsto 1-\ln x$ sur $[\alpha,1]$.

b. En utilisant une intégration par parties montrer que $\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx = 5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$ (1)

On utilise la disposition suivante :

$-u(x)=(1-\ln x)^2$ $\quad u'(x)=2(1-\ln x)'(1-\ln x)=-2\times\frac{1}{x}(1-\ln x)$

$(1)\downarrow \quad (2)\searrow \quad - \quad \downarrow(3)$

$v'(x)=1 \quad v(x)=x$

D'où : $\underbrace{\int_\alpha^1 1\times(1-\ln x)^2dx}_{(1)}=\underbrace{\left[x\times(1-\ln x)^2\right]_\alpha^1}_{(2)}-\underbrace{\int_\alpha^1 \cancel{x}\times(-2)\times\frac{1}{\cancel{x}}(1-\ln x)dx}_{(3)}$

$$=\left(1(1-\ln 1)^2-\alpha(1-\ln\alpha)^2\right)+2\int_\alpha^1(1-\ln x)dx$$

$$=1-\alpha(1-\ln\alpha)^2+2\left[2x-x\ln x\right]_\alpha^1$$

$$=1-\alpha\left(1-2\ln\alpha+(\ln\alpha)^2\right)+2\left((2\times1-1\ln1)-(2\alpha-\alpha\ln\alpha)\right)$$

$$=1-\alpha+2\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2+4-4\alpha+2\alpha\ln\alpha$$

$$=5-5\alpha+4\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2$$

$$=5(1-\alpha)+\alpha(\ln\alpha)(4-\ln\alpha)$$

Conclusion : $\int_\alpha^1(1-\ln x)^2dx=5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

Remarque :
On peut utiliser la disposition suivante :

$u(x)=(1-\ln x)$ $\quad u'(x)=-\frac{1}{x}$

$(1)\downarrow \quad (2)\searrow \quad - \quad \downarrow(3)$ puis on continue les calculs.

$v'(x)=1-\ln x \quad v(x)=2x-x\ln x$

c. Déduire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$. …………………………………… (0,75)

La surface demandée à calculer en cm^2 est :

$$\left(\int_\alpha^1 |f(x)|dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| = \left(\int_\alpha^1 f(x)dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| \ cm^2$$ (car la fonction est positive sur $[\alpha,1]$)

$$= \left(\int_\alpha^1\left(2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2\right)dx\right)\times 1\times 1\ cm^2 \left(\text{ car } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\ cm\right)$$

$$= \int_\alpha^1\left(2-\frac{2}{x}\right)dx + \int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx\ cm^2 \quad ; \text{(question précédente)}$$

$$= 2[x-\ln x]_\alpha^1 + 5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha\ cm^2$$

$$= 2(1-0)-2(\alpha-\ln\alpha)+5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha\ cm^2$$

$$= 7(1-\alpha)+\left(2+\alpha(4-\ln\alpha)\right)\ln\alpha\ cm^2$$

$$= 7(1-\alpha)+(2+4\alpha-\alpha\ln\alpha)\ln\alpha\ cm^2$$

Conclusion : la surface demandée est $7(1-\alpha)+(2+4\alpha-\alpha\ln\alpha)\ln\alpha\ cm^2$.

7. Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in]\alpha,1[$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $\alpha < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. …………………………………… (0,5)

On note la relation : $\alpha < u_n < 1$ par (1)

- On vérifie que la relation (1) est vraie pour $n = 0$.

on a : $u_0 \in]\alpha,1[$ donc $\alpha < u_0 < 1$ d'où la relation (1) est vraie pour $n = 0$.

- On suppose que la relation (1) est vraie pour n de $\mathbb{N}$, ou encore $\alpha < u_n < 1$ est vraie pour n de $\mathbb{N}$ (hypothèse de récurrence) .

- On montre que : la relation (1) est vraie pour $n+1$. (ou encore à démontrer que $\alpha < u_{n+1} < 1$)

d'après hypothèse de récurrence on a : $\alpha < u_n < 1$.

Donc : $\alpha < u_n < 1 \Rightarrow f(\alpha) < f(u_n) < f(1)$ (car la fonction est croissante sur $[\alpha,1]$ et $\alpha < u_n < 1$).

$\Rightarrow \alpha < u_{n+1} < 1$ $\quad$ $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(1) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$ puisque (C_f) coupe (Δ) d'équation $y = x$ aux points d'abscisses $x_0 = 1$ et $x_1 = \alpha$

D'où : la relation (1) est vraie pour $n+1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence on a : $\alpha < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante (on peut utiliser la question 4) b - . ……………………… (0,5)

Pour cela on montre que : $u_n \le u_{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou encore $u_{n+1} - u_n \ge 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$)

Soit n de $\mathbb{N}$, on pose $x = u_n$ et on a $u_n \in]\alpha,1[$ car $\alpha < u_n < 1$ (question précédente)

D'après le résultat de la question II) 4) b -) on a : La courbe est située au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]\alpha,1[$. donc pour tout x de $]\alpha,1[$ on a : $f(x) \ge x$.

ou encore pour tout x : $\alpha < x < 1$ on a : $f(x) \ge x$

D'où : $x = u_n \in]\alpha,1[\Rightarrow f(x) \ge x$

$\Rightarrow f(u_n) \geq u_n$; $(u_n = x$ et $\alpha < u_n < 1)$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$; $(u_{n+1} = f(u_n))$

Donc : $u_{n+1} \geq u_n$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante .

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer la limite . ... (0,75)

- En déduire que (u_n) est convergente.

On a :

- La suite (u_n) est croissante.
- La suite (u_n) est majorée par 1 (puisque $\alpha < u_n < 1$) .
- D'après une propriété la suite (u_n) est convergente .(sa limite est ℓ avec $\ell \in \mathbb{R}$)

Conclusion : la suite (u_n) est convergente .

- On détermine sa limite :

- La suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
- La fonction f est continue sur $]\alpha,1[$ (car f est dérivable sur $]0,+\infty[$) et $f(]\alpha,1[) =]f(\alpha),f(1)[=]\alpha,1[$ donc $f(]\alpha,1[) \subset]\alpha,1[$ (car $f([\alpha,1]) = [f(\alpha),f(1)] = [\alpha,1] \subset I = [\alpha,1]$ (car f est continue et croissante sur $[\alpha,1]$ et $f(1) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$)).
- On a : $u_0 \in]\alpha,1[$.

Donc : La suite (u_n) est convergente vers ℓ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

Donc ℓ est solution de l'équation : $x \in I = [\alpha,1]$; $f(x) = x$ (d'après une propriété)

Pour résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[\alpha,1]$ on étudie l'intersection de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ sur $[\alpha,1]$.

D'après la question II) 4) b -) on a $((C_f)$ coupe (Δ) aux points d'abscisses $x = \alpha$ et $x = 1$).

On cherche la solution qui convient parmi $x = \alpha$ ou bien $x = 1$ (car les deux appartiennent à $[\alpha,1]$)

- La suite (u_n) est croissante donc : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq .... \leq u_n$ et $u_0 \in]\alpha,1[$ (donc $\alpha < u_0$) d'où : $\alpha < u_0 \leq u_n$ et $u_0 \in]\alpha,1[$ par suite $\alpha < u_n$ donc tous les termes u_n de la suite (u_n) sont supérieurs à α .
- Par conséquence : la limite de la suite est strictement supérieure à α, d'où $x = \alpha$ ne convient pas donc la solution qui convient c'est $x = 1$.

Alors la solution de l'équation précédente qui sera la limite de la suite (u_n) : est $x = 1 = \ell$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Fin