الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2023

4SA737θ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

NS 24F	الموضوع		SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS
المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ....(7.75 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse ....(2.25 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes..........(3.5 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique ....(3 pts)

- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

4EA7370

EXERCICE1 :(7.75 points)

Partie I

0.5 1- a) Montrer que : $\forall t \in [0,+\infty[$; $\dfrac{4}{(2+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

0.5 b) En déduire que : $\forall x \in [0,+\infty[$; $\dfrac{2x}{2+x} \leq ln(1+x) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+2x}{1+x}\right)$

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{-1}{2}$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[\;;\; f(x)=g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $\dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \left(\dfrac{g(x)-1}{x}\right)$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

3- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis que :

0.75
$$\forall x \in]0,+\infty[\;;\; f'(x) = \frac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}$$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0.25 b) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $-\dfrac{3}{2} < f'(x) < 0$

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de f

0.75 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

Partie III

0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue x : $f(x)=3x$, admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0=\beta \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}=\frac{1}{3}f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n\geq 0$

0.5 b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ |u_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

EXERCICE2 : (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x\mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0;1;...;n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}\ ;e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 1- a) Montrer que : $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\ \exists c_k\in\left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que : $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\ ;\quad M_kM_{k+1}=\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

(M_kM_{k+1} désigne la distance de M_k à M_{k+1})

0.5 c) En déduire que : $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\ ;\quad \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leqslant M_kM_{k+1}\leqslant\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ S_n=\sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leqslant S_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

EXERCICE3 :(3.5 points)

On considère le nombre complexe : $u=1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$

0.5 1- a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1-i$ et $1+\sqrt{3}i$

0.25 b) Montrer que : $\frac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.25 c) En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

0.5 d) Montrer que : $u=(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

2- On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1 \ , \ y_0 = 0 \ \text{ et } \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \left(2-\sqrt{3}\right) y_n \\ y_{n+1} = \left(2-\sqrt{3}\right) x_n + y_n \end{cases}$$

0.5 a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$

0.5 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

0.5 a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

0.5 b) Montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

EXERCICE4 :(3 points)

Soit p **un nombre premier impair**. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 \equiv 2 \ [p]$

0.25 1- a) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1 \ [p]$

0.25 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ [p]$

(On remarque que : $(2^{\frac{p-1}{2}}-1)(2^{\frac{p-1}{2}}+1) = 2^{p-1}-1$)

2- Soit x une solution de l'équation (E)

0.5 a) Montrer que p et x sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p]$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

0.25 3- Montrer que pour tout $k \in \{1,2,...,p-1\}$, p divise C_p^k

(On rappelle que : $(\forall k \in \{1,2,...,p-1\})$ $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$)

0.25 4-a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i étant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$)

0.5 b) On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 \ [p]$ (on pourra utiliser la question3-)

0.5 5- En déduire que si $p \equiv 5 \ [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

4IA7370

EXERCICE5 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Partie I :

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 2- Montrer que E est un sous- espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.25 3- a) Vérifier que : $\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$; $M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'+3yy',xy'+yx')$

0.5 b) En déduire que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 4- a) Vérifier que : $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1)=O$

0.25 b) En déduire que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.

Partie II :

Soient $F=\{x+y\sqrt{3}\ /\ (x,y)\in\mathbb{Q}^2\}$ et $G=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

0.25 1- Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2$; $x+y\sqrt{3}=0$ si et seulement si $(x=0$ et $y=0)$

0.25 2- Montrer que $F-\{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

3- Soit φ l'application définie de $F-\{0\}$ vers E par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}\ ;\ \varphi(x+y\sqrt{3})=M(x,y)$$

0.25 a) Vérifier que : $\varphi(F-\{0\})=G-\{O\}$

0.25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F-\{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

0.25 c) En déduire que $(G-\{O\},\times)$ est un groupe commutatif.

0.25 4- Montrer que $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.

FIN

Exercice 1 (Analyse)

Partie I

① ⓐ Méthode 1 : Différence

soit $t \in [0, +\infty[$ $\quad \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{4}{(2+t)^2} = \dfrac{(2+t)^2 - 4(1+t)}{(1+t)(2+t)^2}$

$$= \frac{4 + 4t + t^2 - 4 - 4t}{(1+t)(2+t)^2}$$

$$= \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2}$$

et comme $t \in [0, +\infty[$ donc $\dfrac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} \geqslant 0$

D'où $\quad \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{4}{(2+t)^2} \geqslant 0$

Donc $\forall t \in [0, +\infty[\quad \dfrac{4}{(2+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t}$

D'autre part $\quad \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{(1+t)^2}\right) - \dfrac{1}{1+t}$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2}{1+t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+t)^2 + 1 - 2(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+t+1)^2}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2+t)^2}{(1+t)^2}$$

et comme $\forall t \in [0, +\infty[\quad \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(2+t)^2}{(1+t)^2} \geqslant 0$

alors $\quad \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{(1+t)^2}\right) - \dfrac{1}{1+t} \geqslant 0$

D'où $\quad \dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$

finalement $\forall t \in [0,+\infty[\quad \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$

Méthode 2 : Etude de fonction.

(b) on a d'aprés la question précédente

$\forall t \in [0,+\infty[\quad \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$

donc $\forall x \in [0,+\infty[\quad \int_0^x \frac{4}{(2+t)^2}dt \leq \int_0^x \frac{1}{(1+t)}dt \leq \int_0^x \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$

(Les fonctions à integrer sont continues)

càd $\left[-\frac{4}{2+t}\right]_0^x \leq \left[\ln(1+t)\right]_0^x \leq \frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{1+t}\right]_0^x$

donc $-\frac{4}{2+x}+2 \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{1+x}+1\right)$

D'où $\forall x \geq 0 \quad \frac{-4+2x+4}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+x-1+x+1}{1+x}\right)$

finalement $\forall x \geq 0 \quad \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

(2) on a $\frac{g(x)-1}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x} = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

d'aprés la question 1) b) $\forall x \geq 0 \quad \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{x+1}\right)$

donc $\forall x > 0 \quad \frac{-1}{2+x} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2(1+x)}$

et comme $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-1}{2+x}\right) = \lim_{0^+}\left(-\frac{1}{2(1+x)}\right) = -\frac{1}{2}$

alors $\lim_{0^+}\left(\frac{g(x)-1}{x}\right) = \lim_{0^+}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$

Partie II

① $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \left(g(x) \cdot e^{-x}\right) = \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \cdot \frac{1}{e^{x}}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} \left(\left(\frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x}\right) \cdot \frac{1}{e^{x}}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\right) \cdot \frac{1}{e^{x}}$

$= 0 \quad \left(\text{car } \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 , \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0 \right.$

$\text{et } \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$

Intérprétation géométrique

on $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$

② ⓐ $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \left(g(x) \cdot e^{-x}\right)$

$= \lim\limits_{0^+} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \times e^{-x}\right) = 1$

$\left(\text{car } \lim\limits_{0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ et } \lim\limits_{0} (-x) = 0 \text{ et } t \mapsto e^{t} \text{ est continue en } 0 \right)$

donc $\lim\limits_{0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite en 0.

ⓑ soit $x \in]0,+\infty[$

Methode 1

$$\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)\cdot g(x)+\frac{g(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}\cdot g(x)-g(x)+g(x)-1}{x}$$

$$=\frac{e^{-x}\cdot g(x)-1}{x}=\frac{f(x)-1}{x}$$

Methode 2

$$\frac{f(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}\cdot g(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}\cdot g(x)-g(x)+g(x)-1}{x}$$

$$=\frac{e^{-x}\cdot g(x)-g(x)}{x}+\frac{g(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}-1}{x}\cdot g(x)+\frac{g(x)-1}{x}$$

ⓒ on a d'après ce qui précède $\lim\limits_{0^+}\frac{g(x)-1}{x}=-\frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{0^+} g(x)=\lim\limits_{0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

de plus $\lim\limits_{0^+}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{0^+}\left(-\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$

$$\underset{t=-x}{=}\lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{e^{t}-1}{t}\right)=-1$$

donc $\lim\limits_{0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{0^+}\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\cdot g(x)+\frac{g(x)-1}{x}\right)$

$$=-1\times 1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

d'où $\lim\limits_{0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{3}{2}$ $\quad(f(0)=1)$

càd f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-\frac{3}{2}$.

③ on a $x \mapsto 1+x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

de plus $x \mapsto x.e^{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (produit)

et $\forall x \in]0,+\infty[\quad xe^{x} \neq 0$

donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (comme quotient de deux fcts dérivables)

de plus $\forall x \in]0+\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{x}.e^{-x}\right)' = \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'.e^{-x} + \frac{\ln(1+x)}{x}.(e^{-x})'$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2}.e^{-x} - \frac{\ln(1+x)}{x}.e^{-x}$$

$$= \left(\frac{x-(x+1).\ln(1+x)}{x^2(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x}\right).e^{-x}$$

$$= \frac{x-(x+1).\ln(1+x) - x(x+1).\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x}$$

$$= \frac{x - \ln(1+x)\,(x+1+x^2+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x}$$

$$= \frac{x - \ln(1+x)\,(x^2+2x+1)}{x^2(1+x)}.e^{-x}$$

$$= \frac{x-(x+1)^2.\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x} \checkmark$$

④ ⓐ on a d'après la partie I) 1b)

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$$

donc $\forall x > 0 \quad \frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

donc $\forall x > 0 \quad -\frac{1}{2}(1+x)(x^2+2x) < -(1+x)^2\ln(1+x) < -\frac{2x(1+x)^2}{2+x}$

(car $-(1+x)^2 < 0$)

$\Rightarrow \forall x > 0 \quad x - \frac{1}{2}(1+x)(x^2+2x) < x-(1+x)^2\ln(1+x) < x - \frac{2x(1+x)^2}{2+x}$

$\Rightarrow \forall x > 0 \quad \frac{2x - x^2 - 2x - x^3 - 2x^2}{2} < x-(1+x)^2\ln(1+x) < \frac{2x+x^2-2x-4x^2-2x^3}{2+x}$

$\Rightarrow \forall x > 0 \quad \frac{-x^3-3x^2}{2x^2(1+x)} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < \frac{-2x^3-3x^2}{(2+x)x^2(1+x)}$

(car $x^2(1+x) > 0$)

$\Rightarrow \forall x > 0 \quad \frac{-x-3}{2(1+x)} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < \frac{-2x-3}{(2+x)(1+x)}$

on a bien $\forall x > 0 \quad \frac{-2x-3}{(2+x)(1+x)} < 0$

donc $\forall x > 0 \quad \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

montrons maintenant que $\forall x > 0 \quad -\frac{3}{2} < \frac{-x-3}{2(1+x)}$

soit $x > 0 \quad \frac{-x-3}{2(1+x)} + \frac{3}{2} = \frac{-x-3+3+3x}{2(1+x)} = \frac{2x}{2(1+x)} = \frac{x}{1+x} > 0$

Donc $\forall x>0 \quad -\frac{3}{2} < \frac{-x-3}{2(1+x)}$

D'où $\quad -\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$ pour tout $x>0$

finalement $\forall x>0 \quad -\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln x}{x^2(1+x)} < 0$

(b) on a $\forall x \in]0,+\infty[\quad e^{-x}>0$ et $x>0$

donc $\quad -x<0$

d'où $\quad e^{-x}<1$

donc $\forall x\in]0,+\infty[\quad 0<e^{-x}<1$

et on d'après ce qui précède

$\forall x \in]0,+\infty[\quad \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

donc $\quad \frac{x-(1+x)^2\cdot\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\cdot e^{-x} > \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} > -\frac{3}{2}$

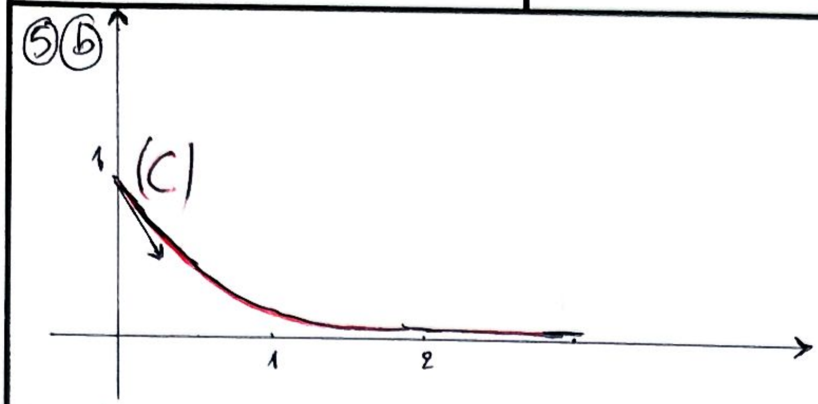
et $\quad \frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\cdot e^{-x} < 0$

D'où $\forall x\in]0,+\infty[\quad -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

5 (a) on a $\forall x>0 \quad f'(x)<0$ donc

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-3/2$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

5) b)



كما وعدتكم، جائزة لمن يحصل على النقطة الكاملة 20 في الامتحان الوطني

BL

Partie III

1) soit l'equation $f(x) = 3x \iff f(x) - 3x$

posons $h(x) = f(x) - 3x$ avec $x \in]0, +\infty[$

h est continue sur $]0, +\infty[$ (comme somme de deux fcts continues sur $]0, +\infty[$)

de plus h est derivable sur $]0, +\infty[$ (de même)

et on a $\forall x \in]0, +\infty[\quad h'(x) = f'(x) - 3$

on a d'après la partie II) 4) b) $\forall x > 0 \quad f'(x) < 0$

donc $\forall x \in]0, +\infty[\quad h'(x) < 0$

d'où h est strictement decroissante sur $]0, +\infty[$

donc h réalise une bijection définie sur J avec

$$J = h(]0, +\infty[) = \left]\lim_{+\infty} h(x), \lim_{0^+} h(x)\right[$$

$$=]-\infty, 1[\quad \left(\text{car } \lim_{+\infty} (-3x) = -\infty \text{ et } f(0) = 1\right)$$

et comme $0 \in]-\infty, 1[$ alors $\exists! \alpha \in]0, +\infty[$ tq $h(\alpha) = 0$

d'où $\exists! \alpha \in]0, +\infty[\quad f(\alpha) = 3\alpha$

finalement l'eq $f(x) = 3x$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

2) a) Pour $n=0$ on a $U_0 = \beta$ et $\beta \in \mathbb{R}^+$

donc la propriété est vraie pour $n=0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $U_n \geqslant 0$ et M.q $U_{n+1} \geqslant 0$

on a $\forall x \in [0, +\infty[\quad f(x) \in]0, 1]$

donc pour $U_n \in [0, +\infty[$ on a bien $f(U_n) \in]0, 1]$

d'où $f(U_n) > 0$

cad $f(U_n) \geqslant 0$

d'où $U_{n+1} \geqslant 0 \quad (\text{car } \frac{1}{3} > 0)$

finalement d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geqslant 0$

b) on pose $R(x) = \frac{1}{3} \cdot f(x)$ alors $U_{n+1} = R(U_n)$

on a la fonction R est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités α et U_n

et la fonction R est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités α et U_n

donc d'après T.A.F $\exists c$ compris entre α et U_n telque

$$|R(U_n) - R(\alpha)| = |R'(c) \cdot (U_n - \alpha)| = |R'(c)| \cdot |U_n - \alpha|$$

et comme $U_{n+1} = R(U_n)$ et $R(\alpha) = \frac{1}{3} f(\alpha) = \frac{1}{3}(3\alpha) = \alpha$

et $\forall x \in]0, +\infty[\quad |f'(x)| < \frac{3}{2}$

donc $\forall x \in]0, +\infty[\quad |R'(x)| < \frac{1}{2} \quad (\text{car } f'(x) = 3 \cdot R'(x))$

et comme $c \in]0,+\infty[$ car $\alpha, U_n \in]0,+\infty[$ donc $|R'(c)| < \frac{1}{2}$

d'où $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

Methode 2

on a f est continue sur $]0,+\infty[$ et derivable sur $]0,+\infty[$

et d'aprés la partie II) 4) b) $\forall x \in]0,+\infty[\quad |f'(x)| < \frac{3}{2}$

donc d'aprés le theoreme de l'inegalite des accroissements finis $\forall x, y \in]0,+\infty[\quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{2}|x-y|$

et comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 0$ et $\alpha \in [0,+\infty[$

alors $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3}{2}|U_n - \alpha|$

cad $|3U_{n+1} - 3\alpha| \leq \frac{3}{2}|U_n - \alpha|$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c) Pour $n = 0$ on a $|U_0 - \alpha| = |\beta - \alpha|$

et $\frac{1}{2^0}|\beta - \alpha| = |\beta - \alpha|$

donc $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0}|\beta - \alpha|$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

et montrons que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|$

on a $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|$

et comme $|U_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ alors

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|$

D'où d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$$

(d) on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

et comme $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \left(\text{car } -1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha| = 0$

donc $\lim\limits_{+\infty} |U_n - \alpha| = 0$

finalement $\lim\limits_{+\infty} (U_n) = \alpha$

Exercice 2 (Analyse)

(1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

on a la fonction $f: x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc f est dérivable sur $\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ et continue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

d'où d'après T.A.F $\exists\, c_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \cdot f'(c_k)$$

c.à.d $\quad e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \cdot e^{c_k} \quad \left(\text{car } f'(x) = e^x \text{ et } \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\right)$

(b) soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

on a $M_k M_{k+1} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}e^{c_k}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}e^{2c_k}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(1 + e^{2c_k}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{1 + e^{2c_k}}$$

c) on a $\frac{k}{n} < c_k < \frac{k+1}{n}$

$$\Rightarrow \frac{2k}{n} < 2c_k < \frac{2(k+1)}{n}$$

$$\Rightarrow 1+e^{\frac{2k}{n}} < 1+e^{2c_k} < 1+e^{\frac{2(k+1)}{n}} \quad (\text{car } \exp \nearrow \text{ sur } \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < \sqrt{1+e^{2c_k}} < \sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

$$\left(\frac{1}{n}>0\right) \Rightarrow \frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < \frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+e^{2c_k}} < \frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < M_k M_{k+1} < \frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

2) a) on d'après 1) c) $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

et comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2i}{n}}}$ $\left(\begin{array}{l} i=k+1 \\ k=0 \to i=1 \\ k=n-1 \to i=n \end{array}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

Autre méthode $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}} = \sqrt{1+e^{\frac{2\times1}{n}}} + \dots + \sqrt{1+e^{\frac{2n}{n}}} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

(b) on a d'après ce qui précède $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq S_n\leq\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

et $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}=\frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(0+\frac{(1-0)k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f(x)=\sqrt{1+e^{2x}}$$

d'autre part $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
avec $f(x)=\sqrt{1+e^{2x}}$

et comme f est continue sur $[0,1]$ alors

$$\lim_{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}=\lim_{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

donc d'après l'inégalité précédente

$$\lim_{+\infty}S_n=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

Rappel

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Les suites $$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right) \text{ et}$$

$$T_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)$$

sont convergentes et $\lim_{+\infty}S_n=\lim_{+\infty}T_n=\int_a^b f(x)\,dx$

Exercice 3 (Nombres complexes)

1) a) on a : $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}.$

c) on a $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

d'autre part $e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (par identification)

et comme $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$

$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

d) Méthode 1

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} + i\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2-1^2}{2} + i\,\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 1+(2-\sqrt{3})i = u$$

donc $u = 1+(2-\sqrt{3}).i$

Méthode 2

$$u = 1+(2-\sqrt{3})i = 1+\tan\frac{\pi}{12}.i = 1+\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}.i$$

$$= \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{12})}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}.e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}.e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \left(\text{car } \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

$$= (\sqrt{6}-\sqrt{2}).e^{i\frac{\pi}{12}}$$

② Pour $n=0$ on a $x_0+iy_0 = 1+i.0 = 1$ et $u^0 = (1+(2-\sqrt{3})i)^0 = 1$

Donc la propriété est vrai pour $n=0$

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $x_n+iy_n = u^n$ et montrons que :

$$x_{n+1}+iy_{n+1} = u^{n+1}$$

on a $x_{n+1}+iy_{n+1} = x_n-(2-\sqrt{3}).y_n + i\left((2-\sqrt{3})x_n+y_n\right)$

$$= x_n+iy_n + i(2-\sqrt{3})x_n + (2-\sqrt{3})i^2.y_n$$

$$= x_n+iy_n + i(2-\sqrt{3})(x_n+iy_n)$$

$$= (x_n+iy_n)(1+i(2-\sqrt{3}))$$

$$= u^n.u = u^{n+1} \quad (x_n+iy_n = u^n \text{ hypothèse de récurrence})$$

(b) on a $u = 1 + (2-\sqrt{3})i$

$$= 1 + \tan\frac{\pi}{12} i = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}$$

donc $u^n = \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n = \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n} \cdot e^{i\frac{n\pi}{12}}$

$$= \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n} \cdot \left(\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right)$$

et comme $u^n = x_n + iy_n$ alors par identification on a :

$$x_n = \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}$$

(3)(a) A_1 A_0 et A_n sont alignés $\Leftrightarrow \frac{u^n - 0}{u^0 - 0} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow u^n \in \mathbb{R} \quad (u^0 = 1)$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(u^n) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n} = 0$

$\Leftrightarrow n \cdot \frac{\pi}{12} \equiv 0 \ [\pi]$

$\Leftrightarrow n\frac{\pi}{12} = k\pi, \ k \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow n = 12 \cdot k$.

(b) soit $n \in \mathbb{N}$

on a $\frac{u^{n+1} - u^n}{0 - u^n} = \frac{-u^n(1-u)}{-u^n} = 1 - u = (\sqrt{3}-2)i$

donc $\frac{u^{n+1} - u^n}{0 - u^n} \in i\mathbb{R} \quad \left(A_{n+1}(u^{n+1}), A_n(u^n), O(0)\right)$

D'où le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .

BL

Exercice 4 (Arithmétique)

1 a) on p un nombre premier impair.

donc $p \neq 2$ et $p \geq 3$

d'où $p \wedge 2 = 1$

alors d'après le petit théorème de Fermat $2^{p-1} \equiv 1\ (p)$

b) on a d'après ce qui précède $2^{p-1} \equiv 1\ (p)$

$\Rightarrow \quad 2^{p-1} - 1 \equiv 0\ (p)$

$\Rightarrow \quad \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0\ (p)$ (d'après la remarque)

$\Rightarrow \quad p \mid \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$

et comme p est premier alors $p \mid 2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ou $p \mid 2^{\frac{p-1}{2}} + 1$

c.à.d $2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0\ (p)$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0\ (p)$

d'où $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ (p)$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ (p)$

2) Méthode 1

soit $d = p \wedge x$ donc $d \mid p$ et $d \mid x$

$\Rightarrow d \mid p$ et $d \mid x^2 - pk \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow d \mid p$ et $d \mid 2 \quad$ (car $x^2 \equiv 2\ (p)$, $x^2 = 2 + pk, k \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow d \mid p \wedge 2$

$\Rightarrow d \mid 1 \quad$ (car $p \wedge 2 = 1$)

et comme $d > 0$ alors $d = 1$, D'où $p \wedge x = 1$

Méthode 2 : on a $x^2 \equiv 2\ (p)$ donc $x^2 = pk + 2, k \in \mathbb{Z}$

d'où $x^2 \wedge p = p \wedge 2 = 1$ c.à.d $x^2 \wedge p = 1$

finalement $x \wedge p = 1$

(b) on a $p \wedge x = 1$, donc d'après le théorème de Fermat $x^{p-1} \equiv 1 \ (p)$ (1)

et comme $x^2 \equiv 2 \ (p)$

alors $(x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \ (p)$ (car $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$, p est impair)

d'où $x^{p-1} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \ (p)$ (2)

finalement $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (p)$ (d'après (1) et (2))

(3) on a $\forall k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$

$C_n^k = \dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}$ donc $k\,C_p^k = p\,C_{p-1}^{k-1}$

d'où $p \mid k\,C_p^k$

et comme $p \wedge k = 1$ (car p est premier et $k < p$)

donc d'après le théorème de Gauss $p \mid C_p^k$

(4) (a) on a $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

donc $(1+i)^p = (\sqrt{2})^p\left(\cos\left(p\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(p\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (Moivre)

$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^p\left(\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(p\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\cdot\frac{\pi}{4}\right).$

(b) on a $(1+i)^p = 2^{p/2}\cos\left(p\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,2^{p/2}\sin\left(p\cdot\frac{\pi}{4}\right)$ d'après 4)a)

et on admet que $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k} + i\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k+1}$

donc par identification on a : $2^{p/2}\cos\left(p\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sum_0^{p-1/2}(-1)^k C_p^{2k}$

et $2^{\frac{p-1}{2}}\cdot\sin\left(\frac{p\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{p-1/2}(-1)^k C_p^{2k+1}$

et comme $\sum_{0}^{p-1/2}(-1)^k C_n^{2k}$ est une somme d'entiers relatifs

donc $2^{\frac{p}{2}}\cos(p\cdot\frac{\pi}{4}) \in \mathbb{Z}$

et d'après la question ③ $\forall k \in \{1,2,\dots,p-1\}$ p / C_p^k

et on a $0 \le k \le p-1$ donc $0 \le 2k \le p-1$

donc p / C_p^{2k} cad $C_p^{2k} \equiv 0 \ (p)$

Par suite $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k} \equiv 0 \ (p)$

d'où $(-1)^0 C_p^0 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k} \equiv (-1)^0 C_p^0 \ (p)$

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k} \equiv 1 \ (p) \quad (\text{car } (-1)^0 C_p^0 = 1)$$

donc $2^{p/2}\cos(p\cdot\frac{\pi}{4}) \equiv 1 \ (p)$.

⑤ on suppose que $p \equiv 5 \ (8)$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $p = 5 + 8\alpha$

donc $2^{p/2}\cos(p\frac{\pi}{4}) \equiv 1 \ (p) \Rightarrow 2^{p/2}\cos(\frac{(5+8\alpha)}{4}\pi) \equiv 1 \ (p)$

$$\Rightarrow 2^{p/2}\cos(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\pi) \equiv 1 \ (p)$$

$$\Rightarrow 2^{p/2}\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) \equiv 1 \ (p)$$

$$\Rightarrow -2^{p/2}\cos(\frac{\pi}{4}) \equiv 1 \ (p)$$

$$\Rightarrow 2^{p/2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \equiv -1 \ (p)$$

$$\Rightarrow 2^{p/2}\frac{1}{2^{1/2}} \equiv -1 \ (p)$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv - \ (p)$$

et comme on a $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (p)$ (question 2)b)) donc $1 \equiv -1 \ (p)$ cad $2 \equiv 0 \ [p]$ absurde
(car x est solution de (E)) d'où (E) n'a pas de solution

Exercice 5 (Structures algébriques)

Partie I

① Soit $E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

on a bien $E \subset M_2(\mathbb{R})$ et $E \neq \emptyset$ car $M(0,0) = \theta_2 \in E$

Soient $M(a,b), M(c,d) \in E$

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & d \\ 2d & c-d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b-c-d & b-d \\ 2b-2d & a-b-c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c+b-d & b-d \\ 2(b-d) & a-c-(b-d) \end{pmatrix}$$

$$= M(a-c, b-d)$$

et comme $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \quad (a-c, b-d) \in \mathbb{R}^2$

alors $M(a-c, b-d) \in E$

d'où E est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

② on a $E \subset M_2(\mathbb{R})$ et $E \neq \emptyset$

Soient $M(a,b), M(c,d) \in E$ soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha M(a,b) + \beta M(c,d) = \alpha \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c+d & d \\ 2d & c-d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a+\beta c+\alpha b+\beta d & \alpha b+\beta d \\ 2(\alpha b+\beta d) & \alpha a+\beta c-(\alpha b+\beta d) \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha a+\beta c, \alpha b+\beta d)$$

donc $\alpha M(a,b)+\beta M(c,d) = M(\alpha a+\beta c, \alpha b+\beta d) \in E$

(car $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$

on a $(\alpha a+\beta c, \alpha b+\beta d)\in\mathbb{R}^2$)

③ ⓐ soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$

$$M(x,y)\times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y')+2yy' & (x+y)y'+y(x'-y') \\ 2y(x'+y')+(x-y)2y' & 2yy'+(x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'+xy'+x'y+yy'+2yy' & xy'+\cancel{yy'}+x'y-\cancel{yy'} \\ 2yx'+\cancel{2yy'}+2xy'-\cancel{2yy'} & 2yy'+xx'-xy'-x'y+yy' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'+3yy'+xy'+x'y & xy'+x'y \\ 2(xy'+x'y) & xx'+3yy'-(xy'+x'y) \end{pmatrix}$$

$$= M(xx'+3yy', xy'+x'y)$$

ⓑ Montrons que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

on a $(E,+)$ est un groupe commutatif (d'après ①)

de plus $E\subset M_2(\mathbb{R})$ et que les deux lois $+$ et $\times$ sont stables dans E (d'après les questions ② et ③ⓐ)

et comme la loi $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans $M_2(\mathbb{R})$ (car $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ anneau) donc la loi $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans E.

comme $M(1,0) = I$ est l'élément neutre de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et $M(1,0) \in E$, donc I est l'élément neutre de $(E, \times)$

de plus $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x',y') &= M(xx' + 3yy', xy' + yx') \\ &= M(x'x + 3y'y, x'y + y'x) \\ &= M(x',y') \times M(x,y) \end{aligned}$$

donc la loi $\times$ est commutative dans E

finalement $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

4) a)
$$\begin{aligned} M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) &= M\left(\sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 3(1)(1), \sqrt{3}\times 1 + 1(-\sqrt{3})\right) \\ &= M(-3+3, \sqrt{3} - \sqrt{3}) \\ &= M(0,0) \end{aligned}$$

b) Comme $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = \theta$

et que $M(\sqrt{3}, 1) \neq \theta$ et $M(-\sqrt{3}, 1) \neq \theta$

alors l'anneau $(E, +, \times)$ n'est pas intègre.

D'où $(E, +, \times)$ n'est pas un corps

(car tous les corps sont des anneaux intègres)

Partie II

Soient $F = \{x+y\sqrt{3} \mid (x,y) \in \mathbb{Q}^2\}$

$G = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$

① si $x=0$ et $y=0$ donc $x+y\sqrt{3} = 0+0\cdot\sqrt{3} = 0$

soit $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $x+y\sqrt{3}=0$

supposons que $y \neq 0$ alors $\sqrt{3} = -\dfrac{x}{y}$

et comme $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}^*$ alors $-\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

absurde

donc $y=0$ et par suite $x=0$

finalement $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x+y\sqrt{3}=0 \iff x=0$ et $y=0$

② on a $F \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^*$ et $F-\{0\} \neq \emptyset$ car $1 \in F-\{0\}$

soit $(x,y) \in F-\{0\}$ donc $\exists (a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tq $x = a+b\sqrt{3}$, $(a,b) \neq (0,0)$

et $\exists (c,d) \in \mathbb{Q}^2$ tq $y = c+d\sqrt{3}$, $(c,d) \neq (0,0)$

$$x \times \frac{1}{y} = \frac{x}{y} = \frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}} = \frac{(a+b\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}{c^2-3d^2}$$

$$= \frac{ac-3bd}{c^2-3d^2} + \sqrt{3}\cdot\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}$$

et comme $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$, $\left(\dfrac{ac-3bd}{c^2-3d^2}, \dfrac{bc-ad}{c^2-3d^2}\right) \in \mathbb{Q}^2$

donc $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$

de plus $x \neq 0$ et $y \neq 0$ donc $\frac{x}{y} \neq 0$

d'où $\frac{x}{y} \in F - \{0\}$.

③ Soit $\varphi : F \setminus \{0\} \longrightarrow G$

$$x + y\sqrt{3} \longmapsto M(x,y)$$

Soit $M(x,y) \in G$

on pose $\varphi(a+b\sqrt{3}) = M(x,y) \Leftrightarrow M(a,b) = M(x,y)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = x+y \\ 2y = 2b \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = b \\ a-b = x-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$$

donc $\forall M(x,y) \in G \ \exists! (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \ (a = x, b = y) \ (a+b\sqrt{3} \in F)$

tq $\varphi(a+b\sqrt{3}) = M(x,y)$

d'où $\varphi(F) = G$

de plus $\varphi(a+b\sqrt{3}) = M(0,0) \Leftrightarrow a+b\sqrt{3} = 0$

donc $\varphi(F - \{0\}) = G - \{0\}$

<u>Autre méthode</u>

$\varphi(F) = \varphi(\{x+y\sqrt{3}, (x,y) \in \mathbb{Q}^2\}) = \{\varphi(x+y\sqrt{3}), (x,y) \in \mathbb{Q}^2\}$

$= \{M(x,y) / (x,y) \in \mathbb{Q}^2\} = G$.

de plus $\varphi(0+0\cdot\sqrt{3}) = M(0,0)$

donc $\varphi(F-\{0\}) = G-\{0\}$

(b) soit $(a+b\sqrt{3},\ c+\sqrt{3}d) \in F-\{0\}$

$$\varphi\left((a+b\sqrt{3})\times(c+\sqrt{3}d)\right) = \varphi\left(ac+3bd+(ad+bc)\cdot\sqrt{3}\right)$$

$$= M(ac+3bd,\ ad+bc)$$

$$= M(a,b)\times M(c,d) \quad (\text{d'après I)3)a)})$$

$$= \varphi(a+b\sqrt{3})\times\varphi(c+d\sqrt{3})$$

donc φ est un homomorphisme de $(F-\{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

(c) d'après la question précédente, $F-\{0\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

donc $F-\{0\}$ est un groupe commutatif ($\times$ est commutatif)

d'où $(\varphi(F-\{0\}),\times)$ est aussi un groupe commutatif

ainsi $(G-\{0\},\times)$ est un aussi un groupe commutatif

(4) on a $(G,+)$ est un groupe commutatif car G est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$ $\left(\begin{array}{l}\text{car } G \subset M_2(\mathbb{R}) \text{ et } G\neq\emptyset \quad 0\in G \\ \text{et } M(a,b)-M(c,d) = M(a-c,\ b-d)\in G\end{array}\right)$

de plus $(G-\{0\},\times)$ est un groupe commutatif (d'après II)3)c))

et la loi $\times$ est distributive par rapport à $+$ (car $\times$ est stable ds G)

D'où $(G,+,\times)$ est un corps commutatif

تم والله أعلم

تم ولله الحمد و المنة

كما وعدتكم جائزة لمن حصل على العلامة الكاملة

20 في الامتحان الوطني

الأستاذ بوعزة لوكيلية

0661969668

bouazzaloukilia@gmail.com