الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A(1,1,-1)$ و $B(0,1,-2)$ ،

و $C(3,2,1)$ والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

0.5 (1) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ وأن شعاعها هو $\sqrt{3}$

0.75 (2) أ- بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ وتحقق من أن $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

1 ب- تحقق من أن $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1

(3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC)

0.25 أ – بين أن $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \quad (t\in I\!R)$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)

0.25 ب – بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(2,0,0)$

0.25 ج – استنتج مركز الدائرة (Γ)

التمرين الثاني (3 ن)

0.75 (1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-12z+61=0$

(2) نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث :. $a=6-5i$ و $b=4-2i$ و $c=2+i$

0.5 أ- احسب $\dfrac{a-c}{b-c}$ واستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية .

0.5 ب- نعتبر الإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث لحق $\vec{u}$ هو $1+5i$

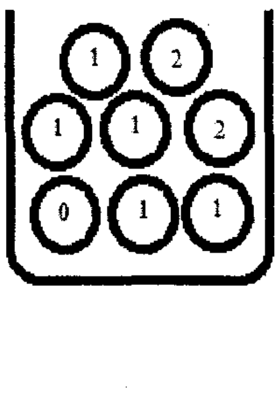
تحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T هو $d=3+6i$

0.75 ج- بين أن : $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ و أن $\dfrac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$

0.5 د- استنتج قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{CB},\overline{CD}}\right)$

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي كيس على ثماني بيدقات : بيدقة واحدة تحمل العدد 0 وخمس بيدقات تحمل العدد 1 وبيدقتان تحملان العدد 2 (لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس).



نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس .

1 (1) ليكن A الحدث : " الحصول على ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى "

بين أن : $P(A)=\dfrac{5}{28}$

1 (2) ليكن B الحدث : " مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 5"

بين أن : $P(B)=\dfrac{5}{56}$

1 (3) ليكن C الحدث : " مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 4 "

بين أن : $P(C)=\dfrac{3}{8}$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 11$ و $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ لكل n من $I\!N$

1) تحقق من أن : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ لكل n من $I\!N$ — 0.25

2) أ- بين بالترجع أن : $u_n < 12$ لكل n من $I\!N$ — 0.5

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا . — 0.5

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . — 0.25

3) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث : $v_n = u_n - 12$ لكل n من $I\!N$

أ- باستعمال السؤال 1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ ثم اكتب v_n بدلالة n — 0.75

ب- بين أن : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $I\!N$ ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) — 0.75

التمرين الخامس

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

1) بين أن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0,1[$ — 0.75

ثم استنتج أن $g(x) \le 0$ لكل x من المجال $]0,1]$

2) بين أن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1,+\infty[$ — 0.75

ثم استنتج أن $g(x) \ge 0$ لكل x من المجال $[1,+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $3cm$) .

1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ وأول هذه النتيجة هندسيا . — 0.5

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (يمكنك كتابة $\frac{f(x)}{x}$ على الشكل $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x$) — 1

واستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

2) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ وأول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$ — 1.25

ب- استنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$ — 0.5

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ ثم بين أن $f(x) \ge 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ — 0.5

3) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ — 1

4) أ- بين أن $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على $I\!R$ — 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)$ — 1

ج- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$ — 0.25

ARE F-Casa 4/6/12 à 19h30 &

التمرين 1 :

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0 \,;\, C(3,2,1)\,;\, B(0,1-2)\,;\, A(1,1,-1)$

(1 $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2-2z=1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-0)^2+(z-1)^2-1=1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها $r=\sqrt{3}$

(2 أ) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&2\\-1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+0\vec{j}-\vec{k}\neq\vec{0}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) إذن $(ABC): x+0y-z+d=0$

و بما أن $A\in(ABC)$ فإن $1+1+d=0$ أي $d=-2$ ومنه $(ABC): x-z-2=0$

ب) $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}\prec\sqrt{3}$ إذن (ABC) يقطع (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{3-2}=1$

(3 أ) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC) و $(\Delta)\perp(ABC)$ إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ موجهة ل (Δ) و حيث أن (Δ) يمر من Ω

فإن $(\Delta)\begin{cases}x=1+t\\y=0+0t\,/\,t\in\mathbb{R}\\z=1-t\end{cases}$ أي $(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=0 \quad /\,t\in\mathbb{R}\\z=1-t\end{cases}$

ب)تحديد $(\Delta)\cap(ABC)$: لنفرغ التمثيل البارامتري ل (Δ) في المعادلة الديكارتية ل (ABC)

$(1+t)-(1-t)-2=0\Rightarrow t=1\Rightarrow H\begin{pmatrix}1+1\\0\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

ج) مركز الدائرة (Γ) هو تقاطع (Δ) و (ABC) أي $H(2,0,0)$

التمرين 2 :

(1 $z^2-12z+61=0$ $\quad \Delta=144-244=-100=(10i)^2$

$z_1=\dfrac{12-10i}{2}=6-5i \quad ; \quad z_2=6+5i$

(2 $z_A=a=6-5i \quad ; \quad z_B=b=4-2i \qquad z_c=c=2+i$

أ) $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{4-6i}{2-3i}=\dfrac{2(2-3i)}{2-3i}=2\in\mathbb{R}$ إذن النقط A و B و C مستقيمية

ب) $T: z'=z+z_{\vec{u}}=z+1+5i$

$d=z_D=z_C+1+5i=2+i+1+5i=3+6i$

ج) $\dfrac{d-c}{b-c}=\dfrac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{1+5i}{2-3i}=\dfrac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{2+3i+10i-15}{4+9}=\dfrac{-13+13i}{13}=-1+i$

لدينا $|-1+i|=\sqrt{2}$ إذن $-1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

وبالتالي $\dfrac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$

د) $\left(\overline{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv Arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv Arg\left(\dfrac{d-c}{b-c}\right)\equiv Arg(-1+i)\equiv\dfrac{3\pi}{4}\;[2\pi]$

الأستاذ وكريمي xyzwak@hotmail.com

التمرين 3) $card\Omega = C_8^3 = 56$

1) $cardA = C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1 = 10$ إذن $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{10}{56} = \dfrac{5}{28}$

2) لدينا $2+2+1=5$ (حالة واحدة فقط) إذن $cardB = C_5^1 \times C_2^2 = 5$ وبالتالي $P(B) = \dfrac{cardB}{card\Omega} = \dfrac{5}{56}$

3) لدينا $0+2+2=4$ و $1+1+2=4$ (حالتان فقط) إذن $cardC = C_1^1 \times C_2^2 + C_5^2 \times C_2^1 = 21$ وبالتالي $P(C) = \dfrac{cardC}{card\Omega} = \dfrac{21}{56} = \dfrac{3}{8}$

التمرين4): $U_0 = 11$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{(n+1)} = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11}$

1) $u_{(n+1)} - 12 = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11} - 12 = \dfrac{10}{11}u_n - \dfrac{120}{11} = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$

2) أ) * من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 11 < 12$

* نفترض أن : $u_n - 12 < 0$ (معطى) ، لنبين أن $u_{(n+1)} - 12 < 0$ (هدف)

$u_{(n+1)} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12) < 0$ (حسب السؤال الأول و الإفتراض)

خلاصة : حسب مبدأالإستدلال بالترجع لدينا $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < 12$

ب) * لدينا $u_0 = 11$ و $u_1 = \dfrac{10}{11}u_0 + \dfrac{12}{11} = \dfrac{122}{11} > u_0$

* نفترض أن $u_{(n+1)} > u_n$ (معطى) ، لنبين أن $u_{(n+2)} > u_{(n+1)}$ (هدف)

$$u_{(n+1)} > u_n \Rightarrow \frac{10}{11}u_{(n+1)} > \frac{10}{11}u_n \Rightarrow \frac{10}{11}u_{(n+1)} + \frac{12}{11} > \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} \Rightarrow u_{(n+2)} > u_{(n+1)}$$

خلاصة : حسب مبدأ الإستدلال بالترجع لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \; u_{(n+1)} > u_n$ أي أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا

ج) المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة (ب12) إذن فهي متقاربة

3) $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_n - 12$

أ) $\forall n \in \mathbb{N} : v_{(n+1)} = u_{(n+1)} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12) = \dfrac{10}{11}v_n$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{10}{11}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 (q)^n = -\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$

ب) لدينا $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 12 + v_n$ إذن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 12 - \left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ وحيث أن $\lim \left(\dfrac{10}{11}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \dfrac{10}{11} < 1$) فإن $\lim u_n = 12$

التمرين 5 :

I) $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x) \quad ; \quad x \in \left]0, +\infty\right[$

x	0	1	$+\infty$
$2x^2$		+	+
$\ln(x)$		- $\quad 0$	+
$2x^2\ln(x)$		- $\quad 0$	+

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		+ $\quad 0$	-

1)نلاحظ من خلال جدولي الإشارة أعلاه أنه إذا كان $x \in \left]0,1\right[$ فإن $x^2 - 1 < 0$ و $2x^2 \ln(x) < 0$ و بالتالي $2x^2 \ln(x) + x^2 - 1 < 0$ أي $g(x) < 0$

وبمأن $g(1) = 0$ فإن $\forall x \in \left]0,1\right]; g(x) \le 0$

2)نلاحظ من خلال جدول الإشارة أعلاه أنه إذا كان $x \in \left]1, +\infty\right[$ فإن $x^2 - 1 > 0$ و $2x^2 \ln(x) > 0$ و بالتالي $2x^2 \ln(x) + x^2 - 1 > 0$ أي $g(x) > 0$

وحيث أن $g(1) = 0$ فإن $\forall x \in \left[1, +\infty\right[; g(x) \ge 0$

(II $f(x)=(x^2-1)\ln(x)$; $x\in]0,+\infty[$ $\qquad \left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm\right)$

(1 أ) $\lim_{0^+} f(x)=\lim_{0^+}(x^2-1)\ln(x)=(-1)\times(-\infty)=+\infty$ إذن (C_f) يقبل المستقيم $(D): x=0$ كمقارب عمودي

ب) $\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}(x^2-1)\ln(x)=+\infty$; $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}(x-\frac{1}{x})\ln(x)=+\infty$ إذن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا إتجاهه محور الأراتيب

(2 أ) $\forall x\in]0,+\infty[: f'(x)=(x^2-1)'\ln(x)+(x^2-1)\left(\ln(x)\right)'=2x\ln(x)+\frac{x^2-1}{x}=\frac{2x^2\ln(x)+x^2-1}{x}=\frac{g(x)}{x}$

لدينا $f'(1)=\frac{g(1)}{1}=0$ إذن (C_f) يقبل في النقطة $A(1,0)$ مماسا أفقيا

ب) لدينا : $x\rangle 0$ و $\forall x\in]0,+\infty[: f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ إذن إشارة $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ هي إشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	‖	-	0	+	

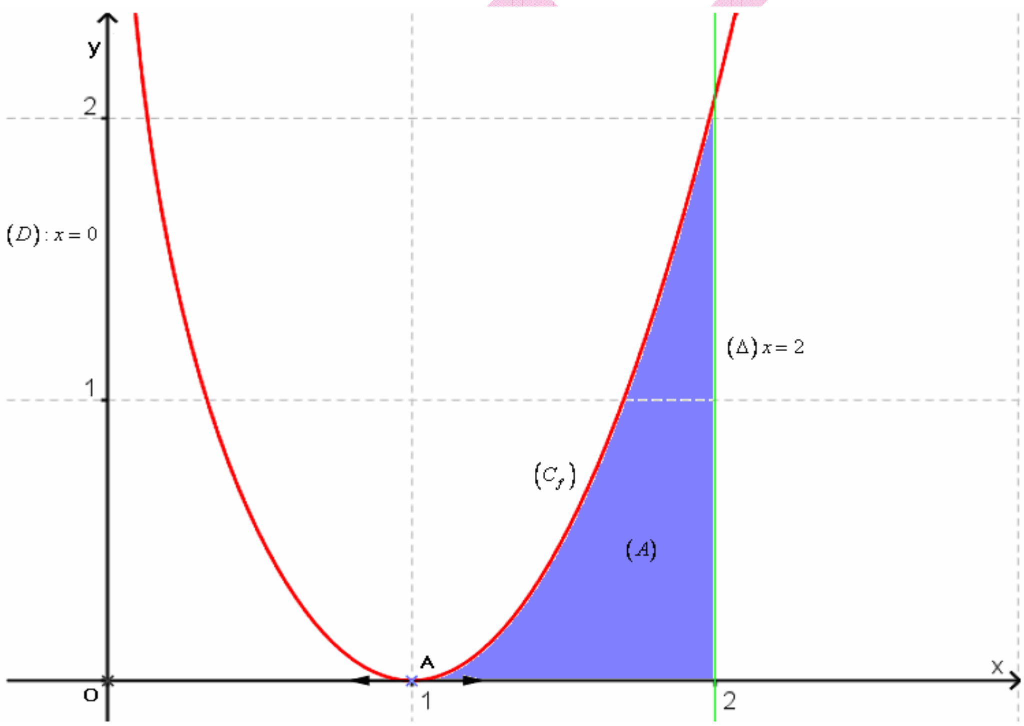
إذن f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$

ج)

x	0		1		$+\infty$
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من خلال جدول تغيرات الدالة f أن $f(1)=0$ هي القيمة الدنيا المطلقة للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ إذن $\forall x\in]0,+\infty[; f(x)\geq 0$

(3



(4 أ) لدينا $\left(\frac{x^3}{3}-x\right)'=x^2-1$ إذن الدالة u أصلية ل : $x\to x^2-1$ على $\mathbb{R}$ ، $\forall x\in\mathbb{R}: u'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)'=x^2-1$

ب) $\int_1^2(x^2-1)\ln(x)dx=\int_1^2\left(\frac{x^3}{3}-x\right)'\ln(x)dx=\left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^3}{3}-x\right)(\ln(x))'dx$

$$= \frac{2}{3}\ln(2) - 0 - \int_1^2 \frac{x^2}{3} - 1dx$$

$$= \frac{2}{3}\ln(2) - \left[\frac{x^3}{9} - x\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\ln(2) - \left(-\frac{10}{9} + \frac{8}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\ln(2) + \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\big(1 + 3\ln(2)\big)$$

ج) لنحدد و حدة قياس المساحة : $"UA" = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 9cm^2$

$$\big(A\big) = \int_1^2 f(x)dx \times "UA" = \int_1^2 (x^2 - 1)\ln(x)dx \times "UA" = \frac{9}{2}(1 + 3\ln(2) \times 9cm^2$$

$$= 2\big(1 + 3\ln(2)\big)cm^2$$