

## EXERCICE I. (10 points)

0.25 A-1- Vérifier que,  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$  ;  $0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0.25 2- En déduire que,  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$  ;  $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

B- On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = ]0, +\infty[$  par,

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de } ]0, +\infty[ ; f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1-a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que  $f$  est dérivable à droite en 0

0.5 c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2-a) Montrer que,  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  ;  $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

0.5

$$\text{où } g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$$

0.5 b) Montrer que,  $(\forall x \in I)$  ;  $0 \leq g'(x) \leq x^2$

0.25 c) En déduire que,  $(\forall x \in I)$  ;  $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

0.25 d) Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $I$

0.25 3-a) Dresser le tableau de variation de  $f$

b) Représenter graphiquement la courbe  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5

( On prendra  $\|\vec{i}\| = 2cm$  et  $\|\vec{j}\| = 2cm$  )

0.5 C-1- Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$

2- On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par,

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que,  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0, 1]$

0.5 b) Montrer que,  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_n - \alpha|$

0.5

c) Montrer par récurrence que ,  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0.25

d) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$

D- Pour tout  $x \in I$  , on pose ,  $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

0.5

1- Montrer que la fonction  $F$  est dérivable sur  $I$  et calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \in I$

0.5

2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que ,

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) ; F(x) = 2 \ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$$

0.5

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$  , puis en déduire que ,  $\int_0^1 f(t)dt = 2 \ln 2 - 1$

0.5

c) Calculer en  $cm^2$  , l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$  , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$

E- On pose , pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  ,  $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

$$\text{et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* , S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k$$

0.25

1-a) Vérifier que ,  $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

0.5

b) En déduire que ,  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

0.25

2-a) Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est monotone.

0.25

b) En déduire que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

0.25

c) Montrer que la limite  $\ell$  de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifie ,  $\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

**EXERCICE2** ,(3.5 points)

Soit  $m$  un nombre complexe non nul donné et  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I- On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$

$$(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$$

0.5

1- Vérifier que ,  $j^3 = 1$  et  $1 + j + j^2 = 0$

0.25

2-a) Montrer que le discriminant de l'équation  $(E_m)$  est ,  $\Delta = [m(1-j)]^2$



- 0.5 b) Déterminer  $z_1$  et  $z_2$  les deux solutions de l'équation  $(E_n)$
- 0.5 3- Dans cette question, on suppose que  $m = 1 + j$   
Montrer que  $(z_1 + z_2)^{2022}$  est un imaginaire pur.
- II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- Soit  $\varphi$  la transformation du plan complexe qui à tout point  $M(z)$  fait correspondre le point  $M'(z')$  tel que  $z' = (1 + j)z$
- 0.25 1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application  $\varphi$   
2- On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $m, mj$  et  $mj^2$   
et on note  $A'(a'), B'(b')$  et  $C'(c')$  les images respectives des points  $A, B$  et  $C$   
par l'application  $\varphi$  et soient  $P(p), Q(q)$  et  $R(r)$  les milieux respectifs des  
segments  $[BA'], [CB']$  et  $[AC']$
- 0.75 a) Montrer que  $a' = -mj^2, b' = -m$  et  $c' = -mj$
- 0.25 b) Montrer que  $p + jq + rj^2 = 0$
- 0.5 c) En déduire que le triangle  $PQR$  est équilatéral.

**EXERCICE3** (3 points)

Soit  $n$  un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation  $(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$

Soit  $(x, y)$  une solution de l'équation  $(E_n)$  dans  $\mathbb{N}^2$  et soit  $p$  le plus petit diviseur premier de  $n$

- 0.25 1-a) Montrer que  $(x+1)^n \equiv x^n \pmod{p}$
- 0.25 b) Montrer que  $p$  est premier avec  $x$  et avec  $(x+1)$
- 0.25 c) En déduire que  $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \pmod{p}$
- 0.5 2- Montrer que si  $n$  est pair, alors l'équation  $(E_n)$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{N}^2$
- 3- On suppose que  $n$  est impair.
- 0.5 a) Montrer qu'il existe un couple  $(u, v)$  de  $\mathbb{Z}^2$  tel que  $nu + (p-1)v = 1$   
(On rappelle que  $p$  est le plus petit diviseur premier de  $n$ )
- 0.25 b) Soient  $q$  et  $r$  respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de  $u$   
par  $(p-1)$ . Vérifier que  $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

0.5 c) On pose ,  $v' = -(v + nq)$ . Montrer que ,  $v' \geq 0$

0.5 d) Montrer que l'équation  $(E_n)$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{N}^2$

#### EXERCICE4 (3.5 points)

On rappelle que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et que  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit  $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

0.25 1-a) Montrer que  $E$  est un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}), +)$

0.25 b) Vérifier que pour tout  $a, b, c$  et  $d$  de  $\mathbb{Z}$  , on a .

$$M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$$

0.5 c) Montrer que  $(E, +, \times)$  est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit  $\varphi$  l'application définie de  $E$  vers  $\mathbb{Z}$  par .

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = |a^2 - 3b^2|$$

0.5 Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(E, \times)$  vers  $(\mathbb{Z}, \times)$

3- Soit  $M(a, b) \in E$

0.25 a) Montrer que  $M(a, b) \times M(a, -b) = (a^2 - 3b^2) \cdot I$

0.5 b) Montrer que si  $M(a, b)$  est inversible dans  $(E, \times)$  alors  $\varphi(M(a, b)) = 1$

0.5 c) On suppose que  $\varphi(M(a, b)) = 1$ .

Montrer que  $M(a, b)$  est inversible dans  $(E, \times)$  et préciser son inverse.

0.25 4-a) Montrer que ,  $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

0.25 b) En déduire que l'anneau  $(E, +, \times)$  est intègre.

0.25 c) Est-ce que  $(E, +, \times)$  est un corps ? justifier votre réponse.

FIN