التمرين 1: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية، صفرها المصفوفة المنعدمة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

لكل زوج (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.25	1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$
0.25	2- أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$
0.5	ب) نضع $J=M(0,1)$. بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$
0.5	3- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
0.5	ب) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية.
	4- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{R})$ المعرف بما يلي: $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})\ ;\ \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$
0.5	أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
0.5	ب) نضع $E^*=E-\{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$
0.25	ج) استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.
0.25	5- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين 2: (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p=3+4k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

0.5	1- بين أن لكل عدد صحيح نسبي x، إذا كان $x^2\equiv1\ [p]$ فإن $x^{p-5}\equiv1\ [p]$
	2- ليكن x عددا صحيحا نسبيا يحقق: $x^{p-5}\equiv1\ [p]$
0.5	أ) بين أن x و p أوليان فيما بينهما.
0.5	ب) بين أن: $x^{p-1}\equiv1\ [p]$
0.5	ج) تحقق أن: $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$
0.5	د) استنتج أن: $x^2\equiv1\ [p]$
0.5	3- حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^{62}\equiv1\ [67]$

التمرين 3: (3.5 نقطة)

ليكن m عددا عقديا.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول z:

$$z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$

1- أ) تحقق أن $\Delta=(im-2i)^2$ هو مميز المعادلة (E_m)	0,25
ب) إعط حسب قيم العدد m مجموعة حلول المعادلة (E_m)	0,5
2- من أجل $m=i\sqrt{2}$، اكتب حلي المعادلة (E_m) على الشكل الأسي.	0,5

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و Ω و M و M' ذات الألحاق على التوالي $a=-1-i$ و $\omega=i$ و m و $m'=-im-1+i$

1- ليكن R الدوران الذي زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و يحول M إلى M'.

أ) تحقق أن Ω هو مركز الدوران R	0.25
ب) حدد b لحق النقطة B التي تحقق : $A=R(B)$	0.5
2- أ) تحقق أن: $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$	0,5
ب) استنتج أن النقط A و M و M' تكون مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط A و B و Ω و M متداورة.	0,5
ج) بين أن مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و M و M' مستقيمية هي دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها.	0,5

التمرين 4: (7.5 نقطة)

الجزء I :

1- أ) بين أن: $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=x-\ln(1+x) \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$	0.5
ب) باستعمال تغيير المتغير : $u=t^2$ بين أن: $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$	0.5
ج) استنتج أن: $\frac{1}{2(1+x)}\leq\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\leq\frac{1}{2} \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$	0.5
2- حدد: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$	0.25

الجزء II :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) & ; \ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25	1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0
0.5	ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (يمكن استعمال نتيجة السؤال 1-I-2).
0.75	ج) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.
0.5	2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم تحقق أن: $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ f'(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$
0.25	ب) استنتج أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$
0.25	ج) تحقق أن: $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$
0.5	3- مثل مبيانيا المنحنى (C) (يتم إنشاء نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0).

الجزء III :

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=f(x)-x$

0.5	أ) بين أن: $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ 0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{2}$
0.5	ب) استنتج أن الدالة g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ثم بين أن: $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$
0.25	ج) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,+\infty[$

2- ليكن a عددا حقيقيا من المجال $]0,+\infty[$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي: $u_0=a$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=f(u_n)$

0.25	أ) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$
0.5	ب) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert\leq\dfrac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$
0.5	ج) بين بالترجع أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \lvert u_n-\alpha\rvert\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\lvert a-\alpha\rvert$
0.25	د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تؤول إلى α

التمرين 5: (2.5 نقطة)

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$

1- بين أن F متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$	0.5
2- أ) بين أن: $F(x)\geq x$; $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$	0.5
ب) بين أن F فردية ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$	0.5
ج) بين أن F تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$	0.5
د) بين أن دالة التقابل العكسي G للدالة F قابلة للاشتقاق في 0 ثم احسب $G'(0)$	0.5

انتهى