الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية **2014**

الموضوع

NS 24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	**الرياضيات**	**مدة الإنجاز**	**4**
الشعبة أو المسلك	**شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)**	**المعامل**	**9**

- مدة إنجاز الموضوع هي أ ربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل .....(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = \underbrace{333.....31}_{n \text{ مرة}}$ (n مرة الرقم 3)

0.5 1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان.

0.5 2- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7 \ [31]$

0.75 4- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \ ; \ 0 \ [31]$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

0.5 5- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ،إذا كان $n \ ; \ 1 \ [30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

التمرين الثاني:(3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ حلقة واحدية ها

التمرين الثالث:(3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $q\in\left]0,\frac{p}{2}\right[$

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E)\quad z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

0.25 أ)تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $D=\left(\sqrt{2}ie^{iq}\right)^2$

0.75 ب) اكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$.

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألحاقها على التوالي 1 و 1 - و $e^{i\left(q+\frac{p}{4}\right)}$ و $e^{i\left(q-\frac{p}{4}\right)}$ و $\sqrt{2}e^{iq}$

0.5 أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان .

0.25 ب)ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية.

0.25 ج)استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$.

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{p}{2}$

0.25 أ)اعط الصيغة العقدية للدوران r.

0.5 ب)تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b=\sqrt{2}e^{iq}+i$

0.25 ج)بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان .

0.25 4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $\left(-\vec{v}\right)$

0.25 5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$.

التمرين الرابع: (8 نقط)

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2} \; ; \; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

0.5 1- أ)بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.25 ب)أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,+\infty[$

0.25 2- أ)بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\qquad f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

0.25 ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

0.5 ج) بين أن: $\left(\exists \alpha \in]0,1[\right) \quad f'(\alpha)=0$

0.5 د)استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

0.5 1- أ)تحقق أن: $\left(\forall t \in [1,+\infty[\right) \quad \frac{1}{2} \le \frac{t^2}{1+t^2} \le 1$

1 ب)بين أن: $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right) \quad F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2 \le F(x) \le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$

(لاحظ أن: $F(x)=\int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\ln t}{t}dt$)

1 ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

0.5 2- أ)بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$

0.25 ب)أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0,+\infty[$

0.5 III -1- أ) بين أن : $\left(\forall t \in]0,+\infty[\right) \quad -t\ln t \le \frac{1}{e}$

0.25 ب)بين أن : $\left(\forall t \in [0,+\infty[\right) \quad f(t) \le \frac{1}{e}$

0.25 ج)استنتج أن: $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad F(x) < x$

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 \in]0,1[$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1}=F(u_n)$

0.5 أ) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in]0,1[$

0.5 ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة .

0.5 ج) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الخامس:(2 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \; ; \; x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

0.5 1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,+\infty[$

2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0,+\infty[$ ، نضع $L(x)=\int_x^1 g(t)dt$

0.25 أ)بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.25 ب)أحسب $L(x)$ من أجل $x>0$

0.5 ج)أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$

3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n=\dfrac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\dfrac{p}{n}\right)$.

0.5 بين أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

انتهى