التمرين الأول:(4 نقط) **الجزءان الأول و الثاني مستقلان**

الجزء الأول: في الحلقة الواحدية $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(نضع: $A^0=I$ و $A^1=A$ و $A^2=A\times A$ و $A^{n+1}=A^n\times A$ لكل n من $\mathbb{N}$)

1- بين أن: $A^{2k}=I \quad (\forall k\in\mathbb{N})$ 0.5ن

2- بين أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ينبغي تحديده. 0.5ن

الجزء الثاني: ليكن a عددا حقيقيا .

لكل x و y من المجال $I=]a,+\infty[$ نضع: $x*y=(x-a)(y-a)+a$

1- أ) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I . 0.5ن

ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي. 0.5ن

ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.5ن

2- بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. 0.5ن

3- نعتبر التطبيق : $\varphi: I \mapsto \mathbb{R}_+^*$

$$x\mapsto \frac{1}{x-a}$$

أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ 0.5ن

ب) حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)}=a^3+a$ حيث: $x^{(3)}=x*x*x$ 0.5ن

التمرين الثاني:(2.5 نقط)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي: $N=\underbrace{111.........11}_{2010 \text{ مرة } 1}$

1- بين أن العدد N يقبل القسمة على 11 0.25ن

2- أ) تحقق أن العدد 2011 أولي و أن $10^{2010}-1=9N$ 0.75ن

ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$ 0.5ن

ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N 0.5ن

3- بين أن العدد N يقبل القسمة على 22121 0.5ن

التمرين الثالث:(3.5 نقط)

الجزء الأول: ليكن m عددا عقديا غير منعدم. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m): \quad z^2+\left[(1-i)m-4\right]z-im^2-2(1-i)m+4=0$$

1- تحقق أن العدد $z_1=-m+2$ حل للمعادلة (E_m) — 0.5ن

2- ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m)

أ) بين أن: $z_1z_2=1 \iff im^2+2(1-i)m-3=0$ — 0.5ن

ب) حدد قيمتي m بحيث : $z_1z_2=1$ — 1ن

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث: $z'-1=-(z-1)$

و الدوران R الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ وقياس زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة $M''=R(M)$

1- أ) بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1 — 0.25ن

ب) بين أن : $z''=iz+2$ — 0.25ن

2- نفترض أن النقطة M تخالف النقطة O أصل المعلم ولتكن A النقطة التي لحقها 2

أ) احسب $\dfrac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$ — 0.5ن

ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة. — 0.5ن

التمرين الرابع:(6.5 نقط)

الجزء الأول: دراسة الحلول الموجبة للمعادلة : $(E): e^x=x^n$ **حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x} \quad ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $e^x=x^n \iff n=f(x)$ — 0.25ن

2- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 — 0.5ن

3- احسب النهايات : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها. — 1.5ن

4- ادرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم أعط جدول تغيراتها. — 0.75ن

5- بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها . — 0.5ن

6- انشئ المنحنى (C) — 0.5ن

0.5ن 7- بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين a_n و b_n بحيث : $1 < a_n < e < b_n$

الجزء الثاني: دراسة تقارب المتتاليتين $(a_n)_{n\geq3}$ و $(b_n)_{n\geq3}$

0.5ن 1- بين أن : $b_n \geq n$ $(\forall n \geq 3)$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq3}$

0.5ن 2- أ) بين أن المتتالية $(a_n)_{n\geq3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

0.5ن ب) بين أن: $\frac{1}{n} < ln(a_n) < \frac{e}{n}$ $(\forall n \geq 3)$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(a_n)_{n\geq3}$

0.5ن ج) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = e$

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي: $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

0.5ن 1- أ) بين أن: $0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$ $(\forall x \geq 0)$.

0.5ن ب) بين أن: $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ $(\forall x \geq 1)$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$

0.5ن 2- بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و أن : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$ $(\forall x \geq 0)$

3- نعتبر الدالة العددية G المعرفة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \ ; \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

0.25ن أ) بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

0.75ن ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0;+\infty[$ بحيث: $F'(c) = 0$ و أن : $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$

(يمكنك تطبيق مبرهنة رول (ROLLE) بالنسبة للدالة G على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

4- نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

0.5ن أ) بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$

0.5ن ب) استنتج أن العدد c وحيد ثم أعط جدول تغيرات الدالة F.

انتهى