التمرين الأول :(3.5 نقط) الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.

I- نزود المجموعة $I =]0,+\infty[$ بقانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي:

$$\left(\forall (a,b)\in I\times I\right) \quad a*b = e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

0.5 | 1) بين أن القانون * تبادلي و تجميعي في I .

0.25 | 2) بين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا ε في I يتم تحديده.

0.75 | 3)أ- بين أن $\left(I\setminus\{1\},*\right)$ زمرة تبادلية. ($I\setminus\{1\}$ هي المجموعة I محرومة من 1)

0.25 | ب- بين أن $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $\left(I\setminus\{1\},*\right)$.

4) نزود I بقانون التركيب الداخلي $\times$ ($\times$هو الضرب في $\mathbb{R}$)

0.25 | أ- بين أن القانون * توزيعي بالنسبة للقانون $\times$

0.5 | ب- بين أن $(I,\times,*)$ جسم تبادلي.

II- نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

0.5 | 1) أحسب A^2 و A^3 .

0.5 | 2) استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا .

التمرين الثاني :(3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

0.25 | 1) أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $3+4i$

0.5 | ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): 4z^2-10iz-7-i=0$

2) ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث: $\mathrm{Re}(a)<0$ والنقطتين A و B صورتي a و b على التوالي.

0.25 | أ- تحقق أن: $\dfrac{b}{a}=1-i$

0.75 | ب- استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في A .

3) لتكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولتكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ولتكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$.

0.5 | أ- حدد بدلالة c العدد العقدي d لحق النقطة D.

0.5 | ب- حدد بدلالة c العدد العقدي ℓ لحق النقطة L .

0.75 | ج- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\dfrac{\ell-c}{a-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACL .

التمرين الثالث:(3 نقط)

1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث: $m^2+1\equiv 0 \quad [5]$ 1

2) ليكن p عددا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع k عدد صحيح طبيعي.

و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n^2+1\equiv 0\,[p]$

أ- تحقق أن: $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\,[p]$ 0.25

ب- بين أن n و p أوليان فيما بينهما. 0.5

ج- استنتج أن: $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\,[p]$ 0.75

د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق: $n^2+1\equiv 0\,[p]$ 0.5

التمرين الرابع:(6.25 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=4xe^{-x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ 0.5

2) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها . 0.75

3) حدد معادلة نصف المماس للمنحنى (C) في أصل المعلم ثم أنشئ (C). 0.75

(نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى (C))

4)أحسب التكامل $a=\int_0^1 f(x)dx$ ثم استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحوري المعلم و المستقيم الذي معادلته $x=1$ 0.5

II- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$

1) أ- بين أن: $e^{-x^2}<e^{-x}$ $\quad(\forall x>1)$ 0.25

ب- استنتج نهاية الدالة f_n عندما تؤول x إلى $+\infty$. 0.25

2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها . 0.75

3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(u_n)=1$ 0.5

4) أ- تحقق أن : $f_{n+1}(u_n)=u_n$ $\quad(\forall n\geq 2)$ 0.25

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . 0.75

5) نضع : $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$

0.25 أ- بين أن : $0<\ell\leq 1$

0.25 ب- بين أن : $-\frac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln(4)}{n} \quad (\forall n\geq 2)$

0.5 ج- استنتج أن : $\ell=1$

التمرين الخامس:(3.75 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

0.25 1) بين أن الدالة F فردية .

2) لكل x من المجال $]0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=\int_1^x\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

0.25 أ- تحقق أن: $(\forall x>0)\quad F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$

0.5 ب- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ من أجل $x>0$

0.5 ج- استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]0,+\infty[$.

0.5 3) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن: $(\forall x>0)\,(\exists c\in]x,2x[)\ :\ F(x)=\frac{x}{\ln(1+c^2)}$

0.25 ب- استنتج أن: $(\forall x>0)\ :\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$

0.75 ج-حدد النهايات : $\lim_{x\to0^+}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

0.75 د- تحقق أن : $F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}$ و $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\sqrt{e-1}}{2}$

ثم استنتج أن المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $]0,+\infty[$.