المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

المركز الوطني للامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية 2007)
الموضوع

C: NS24

مدة الإنجاز: 4

المعامل: 10

المـــــادة: الرياضيات

الشعــــب(ة): العلوم الرياضية (أ) و (ب)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3 نقط)

I/ ليكن $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 ، نضع : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$

1- أ) تحقق أن لكل زوج (a,b) من E^2: $a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$ — 0.25ن

ب) استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E . — 0.25ن

2- بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية . — 0.5ن

II/ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ وأن $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ فضاء متجهي حقيقي . لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل: $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a&a\\a&\sqrt{2}-a\end{pmatrix}$ حيث : $a\in E$

نضع : $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1- أ) تحقق أن : $A^2=-2A$ وأن : $M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$ — 0.5ن

ب) بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$. — 0.5ن

2- نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned}\varphi:(E,\perp)&\to(\mathcal{F},\times)\\ a&\to\varphi(a)=M(a)\end{aligned}$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي . — 0.5ن

ب) استنتج بنية $(\mathcal{F},\times)$. — 0.5ن

التمرين الثاني (3.5 نقطة)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين العقديين i و $-i$.

I/ 1-أ) تحقق أن العدد العقدي $u=a+i$ حل للمعادلة: $(E)\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$ — 0.25ن

ب- حدد v الحل الثاني للمعادلة (E). — 0.25ن

2- نفترض أن : $|a|=1$

0.25ن أ) بين أن : $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$

0.25ن ب) تحقق أن: $u^2=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]$

0.5ن ج) استنتج أن : $\arg(u)\equiv\frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$

0.5ن 3- بين أن : $|u|+|v|\geq 2$

II/ المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث:

$|u|+|v|=m$

0.5ن 1- بين أن (E_m) إهليلج مركزه O .

2- نضع: $a=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

0.25ن أ) بين أن : $x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m)

0.25ن ب) أنشىء (E_4) .

0.5ن 3- نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رأسي الإهليلج (E_4) .

بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

<u>التمرين الثالث</u> (3 نقط)

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E):195x-232y=1$

0.5ن أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232

0.5ن ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\left\{(163+232k;137+195k)/k\in\mathbb{Z}\right\}$

0.25ن ج) أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0\leq d\leq 232$ و $195d\equiv 1\ [232]$

0.25ن 2- بين أن 233 عدد أولي

3- لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232

نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233 .

نقبل أن : $(\forall a\in A\setminus\{0\})\quad a^{232}\equiv 1\ [233]$

0.5ن أ) بين أنه لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a)=f(b)$ فإن $a=b$

0.5ن ب) ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث : $f(a)=b$ ، حدد a بدلالة b .

0.5ن ج) استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

التمرين الرابع (10.5 نقطة)

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^{x}$

1- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$ — 0.5ن

2- بين أن x=0 هو الحل الوحيد للمعادلة g(x)=0 — 0.25ن

II/ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1} \ ; x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i};\vec{j})$

1- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$. — 0.5ن

2- بين أن الدالة f متصلة في 0 . — 0.25ن

3- أ) احسب $f'(x)$ من اجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^{*}$. — 0.5ن

ب) استنتج تغيرات الدالة f . — 0.25ن

4- نعتبر التكامل $J(x)=\int_{0}^{x} te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي.

أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $J(x)=e^{-x}(e^{x}-1-x)$ — 0.5ن

ب) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^{2}}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\leq J(x)\leq \dfrac{x^{2}}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ — 1ن

ج) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^{*}$: $\dfrac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}\leq \dfrac{e^{x}-1-x}{x^{2}}\leq \dfrac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$ — 0.5ن

د) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ — 0.75ن

5- أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^{*}$: $f''(x)=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}\left(e^{x}(x-2)+2+x\right)$. — 0.5ن

ب) ادرس إشارة $e^{x}(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$. — 0.5ن

ج) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^{*}$: $f''(x)>0$ — 0.25ن

د) أنشئ (C) . — 0.5ن

III/ نعتبر المتتالية العددية $(u_{n})_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_{0}=1$ و لكل n من N: $u_{n+1}=f(u_{n})$

1- بين أن x=ln2 هو الحل الوحيد للمعادلة : f(x)=x . — 0.25ن

2- أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^{+}$: $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$. — 0.5ن

0.5ن ب) بين أن لكل n من N : $\left|u_{n+1}-\ln 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n-\ln 2\right|$

0.5ن ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة وحدد نهايتها .

IV/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1}\,dt \;;\; x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$

0.5ن 1- أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

0.25ن ب) بين أن الدالة F متصلة في 0 .

0.5ن ج) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $F'(0)=1$

0.5ن 2 -أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$.

0.25ن ب) ادرس تغيرات الدالة F .