J 783

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة النهائية
20 /20
عشرون
على عشرون

الشعبة / المسلك : علوم تجريبية مسلك علوم فيزيائية

مادة : الرياضيات

التقدير المفسر للنقطة

خاص بالأكاديمية

76870

إسم المصحح وتوقيعه (ها) : خمرزراوله

التمرين الأول :

1 - أ - لنبين أن : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{k}$ ،

لدينا الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

ولدينا $\vec{AB}(1, 1, -1)$ و $\vec{AC}(-1, 0, 1)$

إذن : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$

0.5

ومنه : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (1-0)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (0+1)\vec{k}$

إذن : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

ب - معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) ،

لدينا : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ إذن النقط A و B و C نقط غير مستقيمية، إذن نحدد مستوى وحيد متجهته المنظمية $(\vec{AB} \wedge \vec{AC})(1, 0, 1)$ إذن المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $x + z + d = 0$ $(d \in \mathbb{R})$

0.25

بما أن $A \in (ABC)$ فإن : $0 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

إذن : $x + z - 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2 - معادلة الفلكة (S) :

لدينا الفلكة (S) مركزها $\Omega(1, 1, 2)$ و شعاعها $R = \sqrt{2}$

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{2}$

0.5

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$

وبالتالي $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$ معادلة للفلكة (S)

3 - لنبين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة A :

لنقارن مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC) و شعاع الفلكة (S)

$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|x_\Omega + z_\Omega - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 + 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

0.5

لدينا : $R = \sqrt{2}$ إذن : $d(\Omega, (ABC)) = R$ ومنه المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

بتعويض مثلوث إحداثيات النقطة A في معادلة الفلكة (S) يكون لدينا :

$(0-1)^2 + (1-1)^2 + (1-2)^2 = 1 + 1 = 2$

4 - أ - تمثيل بارامتري لـ (Δ) :

لدينا المستقيم (Δ) يمر من النقطة C وعمودي على المستوى (ABC)، إذن المتجهة الموجهة للمستقيم (Δ) هي المتجهة المنظمية على المستوى (ABC) ذو المعادلة $x+z-1=0$ إذن $\vec{n}(1,0,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) ومنه،

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$$

هو التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ).

0,25

ب) لنبين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في نقطة D.

لنقارن مسافة النقطة Ω عن المستقيم (Δ) وشعاع الفلكة (S):

لدينا،
$$d(\Omega,(\Delta))=\frac{\|\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$$

لدينا، $\vec{\Omega C}(-2,0,0)$

مع،
$$\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}=\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2&1\\0&0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}=(0-0)\vec{i}-(-2-0)\vec{j}+(0-0)\vec{k}$$

0,5

إذن،
$$\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}=2\vec{j}$$

ومنه، $\|\vec{n}\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$ و $\|\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}\|=2$

إذن،
$$d(\Omega,(\Delta))=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

مع $R=\sqrt{2}$ إذن $d(\Omega,(\Delta))=R$

وبالتالي المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في نقطة مثلوث إحداثياتها حل النظمة،

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \qquad / t\in\mathbb{R} \\ z=2+t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2 \end{cases}$$

بتعويض x و y و z على التوالي بـ $-1+t$ و 1 و $2+t$ في معادلة الفلكة (S) يكون

لدينا،
$$(-1+t-1)^2+(1-1)^2+(2+t-2)^2=2$$

إذن،
$$t^2+t^2=2 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=1$$

ومنه، $\begin{cases} x=-1+1=0 \\ y=1=1 \\ z=2+1=3 \end{cases}$ إذن، $D(0,1,3)$

ج - لنحسب الجداء السلمي $\vec{AC}.(\vec{i}+\vec{k})$:

لدينا، $\vec{AC}(-1,0,1)$ و $(\vec{i}+\vec{k})(1,0,1)$

إذن،
$$\vec{AC}.(\vec{i}+\vec{k})=-1+0+1=0$$

لدينا $\vec{A\Omega}(1,0,1)$

إذن،
$$d(A,(\Delta))=\frac{\|\vec{A\Omega}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$$

0,5

ومنه،
$$d(A,(\Delta))=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$$

التمرين الرابع:

1 - أ - لنتحقق أن الدالة $x \mapsto xe^x$ دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة $H : x \mapsto xe^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$، إذن: $H'(x) = (xe^x)'$

ومنه: $H'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) = h(x)$

وبالتالي الدالة $x \mapsto xe^x$ دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$

ـ لنحسب $I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$.

لدينا: $I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (1+x)e^x\,dx$

0,75

ولدينا الدالة الأصلية للدالة h هي الدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$، إذن:

$$I = [xe^x]_{-1}^{0}$$

ومنه: $I = 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$

ب - لنحسب التكامل $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x\,dx$

نضع: $U'(x) = e^x$ و $V(x) = (x+1)^2$

إذن: $U(x) = e^x$ و $V'(x) = 2(x+1)$

لدينا الدالتين U و V قابلتين للاشتقاق على $[-1;0]$

ولدينا الدالتين U' و V' دالتين متصلتين على المجال $[-1;0]$

إذن حسب تقنية المكاملة بالأجزاء لدينا:

$$J = \left[e^x(x+1)^2\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2e^x(x+1)\,dx$$

0,75

إذن: $J = \left[e^x(x+1)^2\right]_{-1}^{0} - 2\int_{-1}^{0} e^x(x+1)\,dx$

ومنه: $J = 1 - 0 - 2 \times \frac{1}{e} = \boxed{1 - \frac{2}{e}}$

2 - أ - لنحل المعادلة التفاضلية: $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

لدينا المعادلة المميزة للمعادلة (E) هي: $r^2 - 2r + 1 = 0$ (1)

ولدينا مميز المعادلة (1) هو: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

بما أن $\Delta = 0$ إذن المعادلة (1) تقبل حل وحيد هو: $r = \frac{2}{2} = 1$ 0,5

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h : x \mapsto (\beta x + \alpha)e^x$

ب - لنبين أن الدالة h هي حل للمعادلة (E).

لدينا $h(0) = 1$ إذن: $h(0) = (\beta \times 0 + \alpha)e^0 = 1$

ومنه: $\boxed{\alpha = 1}$ 0,5

ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $h'(x) = \beta x + e^x(\beta x + 1)$

مع: $h'(0) = 2$ إذن: $h'(0) = \beta e^0 + e^0(\beta \times 0 + 1) = 2$

ومنه: $\beta + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$

ومنه: $h(x) = (x+1)e^x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

وبالتالي الدالة h هي حل المعادلة (E)

4 - أ - تمثيل بارامتري لـ (Δ) :

لدينا المستقيم (Δ) يمر من النقطة C وعمودي على المستوى (ABC). إذن المتجهة الموجهة للمستقيم (Δ) هي المتجهة المنظمية على المستوى (ABC) ذو المعادلة $x+z-1=0$ إذن $\vec{n}(1,0,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) ومنه :

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$ هو التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ)

ب) لنبين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في نقطة D :

لنقارن مسافة النقطة Ω من المستقيم (Δ) وشعاع الفلكة (S)

لدينا : $d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{\|\vec{\Omega C} \wedge \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$

لدينا : $\vec{\Omega C}(-2,0,0)$

مع : $\vec{\Omega C} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$

$\vec{\Omega C} \wedge \vec{n} = (0-0)\vec{i} - (-2-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$

إذن : $\vec{\Omega C} \wedge \vec{n} = 2\vec{j}$

ومنه : $\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ و $\|\vec{\Omega C} \wedge \vec{n}\| = 2$

إذن : $d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

مع $R=\sqrt{2}$ إذن $d(\Omega,(\Delta)) = R$

وبالتالي المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في نقطة مثلوث إحداثياتها حل النظمة

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2 \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

بتعويض x و y و z على التوالي بـ $-1+t$ و 1 و $2+t$ في معادلة الفلكة (S) يكون

لدينا : $(-1+t-1)^2+(1-1)^2+(2+t-2)^2=2$

إذن : $t^2+t^2=2 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=1$

ومنه : $\begin{cases} x=-1+1=0 \\ y=1=1 \\ z=2+1=3 \end{cases}$ إذن : $D(0,1,3)$

ج - لنحسب الجداء السلمي $\vec{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})$:

لدينا $\vec{AC}(-1,0,1)$ و $(\vec{i}+\vec{k})(1,0,1)$

إذن : $\vec{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k}) = -1+0+1=0$

لدينا $\vec{A\Omega}(1,0,1)$

إذن : $d(A,(\Delta)) = \dfrac{\|\vec{A\Omega} \wedge \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$

ومنه : $d(A,(\Delta)) = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$

0,25

0,5

0,5

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة النهائية
/20
على عشرون

الشعبة / المسلك : ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بالأكاديمية

إسم المصحح وتوقيعه (ها) : ....

المسألة

1- لنحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

*) لدينا، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(e^{x/2}-1)^2$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} e^{x/2} = +\infty$ ولدينا $\lim_{x\to+\infty}(e^{x/2}-1)^2 = +\infty$

مع $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ إذن، $\lim_{x\to+\infty} x(e^{x/2}-1)^2 = +\infty$

ومنه، $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ 0,5

**) لدينا، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x(e^{x/2}-1)^2$

ولدينا، $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} e^{x/2} = 0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}(e^{x/2}-1)^2 = 1$

إذن، $\lim_{x\to-\infty} x(e^{x/2}-1)^2 = -\infty$ أي، $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

2- لنحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا، $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(e^{x/2}-1)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} (e^{x/2}-1)^2$ 0,5

ولدينا، $\lim_{x\to+\infty} (e^{x/2}-1)^2 = +\infty$ إذن، $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$

التأويل: (Cf) يقبل فرع شلجمي موجه نحو محور (Oy) بجوار $+\infty$

3- أ- لنبين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C) بجواره $-\infty$

لدينا، $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}(x(e^{x/2}-1)^2 - x)$ 0,5

إذن، $= \lim_{x\to-\infty} xe^{x} - 2xe^{x/2} + x - x$

ومنه، $= \lim_{x\to-\infty}(xe^{x} - 2xe^{x/2})$

لـ لنحسب $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{x/2}$

نضع $X = \frac{x}{2}$ إذن، $x = 2X$ و $x\to-\infty \iff X\to-\infty$

إذن، $\lim_{X\to-\infty} 4Xe^{X} = 0$

(لأن $\lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$) إذن، $\lim 2xe^{x/2} = 0$

وبالتالي المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب - إشارة $(f(x)-x)$ ، $(\forall x\in\mathbb{R})$

لدينا : $f(x)-x = x(e^{x/2}-1)^2 - x$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

$= xe^{x} - 2xe^{x/2}$

إذن : $f(x)-x = x(e^{x}-2e^{x/2})$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

- لندرس إشارة $(e^{x}-2e^{x/2})$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا : $e^{x}-2e^{x/2}=0 \iff e^{x}=2e^{x/2} \iff x=\ln 2-\frac{x}{2} \iff x=\ln 4$ 0,75

ولدينا : $e^{x}-2e^{x/2}>0 \iff e^{x}>2e^{x/2} \iff x>\ln 2-\frac{x}{2} \iff x>\ln 4$

ولدينا : $e^{x}-2e^{x/2}<0 \iff e^{x}<2e^{x/2} \iff x<\ln 2-\frac{x}{2} \iff x<\ln 4$

وبالتالي إشارة $x(e^{x}-2e^{x/2})$ نلخصه في الجدول الآتي :

x	$-\infty$	0		$\ln 4$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$e^{x}-2e^{x/2}$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق $y=x$	تقاطع $y=x$ و C_f	(C_f) تحت $y=x$	تقاطع $y=x$ و (C_f)	(C_f) فوق $y=x$

4 - أ - لنحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء ومجموع ومركب دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : 0,5

$f'(x) = (e^{x/2}-1)^2 + x\left(2\left(\frac{1}{2}e^{x/2}\right)(e^{x/2}-1)\right)$

إذن : $= (e^{x/2}-1)^2 + x\left(e^{x/2}(e^{x/2}-1)\right)$

ومنه : $f'(x) = (e^{x/2}-1)^2 + xe^{x/2}(e^{x/2}-1)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

ب - لنتحقق أن $0 \geq x(e^{x/2}-1)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$. 0,5

$e^{x/2}-1=0 \iff e^{x/2}=1 \iff \frac{x}{2}=0 \iff x=0$

$e^{x/2}-1>0 \iff e^{x/2}>1 \iff \frac{x}{2}>0 \iff x>0$

$e^{x/2}-1<0 \iff e^{x/2}<1 \iff \frac{x}{2}<0 \iff x<0$

نلخص إشارة $x(e^{x/2}-1)$ في الجدول الآتي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$e^{x/2}-1$	$-$	0	$+$
$x(e^{x/2}-1)$	$+$	0	$+$

إذن $x(e^{x/2}-1)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا $e^{x/2}>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ إذن : $xe^{x/2}(e^{x/2}-1)\geq 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

مع $(e^{x/2}-1)^2\geq 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ وبالتالي $(e^{x/2}-1)^2+xe^{x/2}(e^{x/2}-1)\geq 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

[illegible]

ج - جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

0.25

5 - أ - لنحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين إذن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f''(x) = \left((e^{x/2}-1)^2 + x e^{x/2}(e^{x/2}-1)\right)'$$

$$f''(x) = 2\left(\frac{1}{2}e^{x/2}\right)(e^{x/2}-1) + \left(e^{x/2}+\frac{x}{2}e^{x/2}\right)(e^{x/2}-1) + \frac{xe^{x/2}}{2}e^{x/2}$$

$$= e^{x/2}(e^{x/2}-1) + \frac{1}{2}xe^{x/2}e^{x/2} + \left(e^{x/2}+\frac{x}{2}e^{x/2}\right)(e^{x/2}-1)$$

$$= \frac{1}{2}e^{x/2}\left(2(e^{x/2}-1) + xe^{x/2}\right) + \frac{1}{2}e^{x/2}(2+x)(e^{x/2}-1)$$

$$= \frac{1}{2}e^{x/2}\left(2e^{x/2} - 2 + xe^{x/2} + 2e^{x/2} - 2 + xe^{x/2} - x\right)$$

0.5

$$= \frac{1}{2}e^{x/2}\left(4e^{x/2} - 4 + 2xe^{x/2} - x\right)$$

$$(\forall x\in\mathbb{R}) \quad f''(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}\left((2x+4)e^{x/2} - x - 4\right) = \frac{1}{2}e^{x/2}g(x)$$

ب - إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

من خلال منحنى الدالة g نلاحظ عند المجال $[\alpha,0]$ منحنى الدالة g تحت محور الأفاصيل إذن : $\forall x\in[\alpha,0] \quad g(x) \leq 0$ 0.5

ولدينا عند المجالين $]-\infty,\alpha]$ و $[0,+\infty[$ منحنى الدالة g فوق محور الأفاصيل إذن : $g(x) \geq 0$ لكل x من $]-\infty,\alpha]$ و $[0,+\infty[$.

ج - تقعر المنحنى (C) :

لدينا $\frac{1}{2}e^{x/2} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

ولدينا لكل x من $[\alpha,0]$ $g(x) \leq 0$ إذن : $f''(x) < 0 \quad \forall x\in[\alpha,0]$

ولدينا لكل x من المجالين $]-\infty,\alpha]$ و $[0,+\infty[$ $g(x) \geq 0$ إذن : $f''(x) > 0$ لكل x من $]-\infty,\alpha]$ و $[0,+\infty[$

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
تقعر (C_f)	$\cup$	نقطة انعطاف	$\cap$	نقطة انعطاف	$\cup$

0.5

بما أن f'' تنعدم وتغير الإشارة في α و 0 إذن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف

EXAMEN DU BACCALAUREAT

RESERVE A L'ACADEMIE

Série/Option : ....

Composition de : ....

Note définitive

........../20

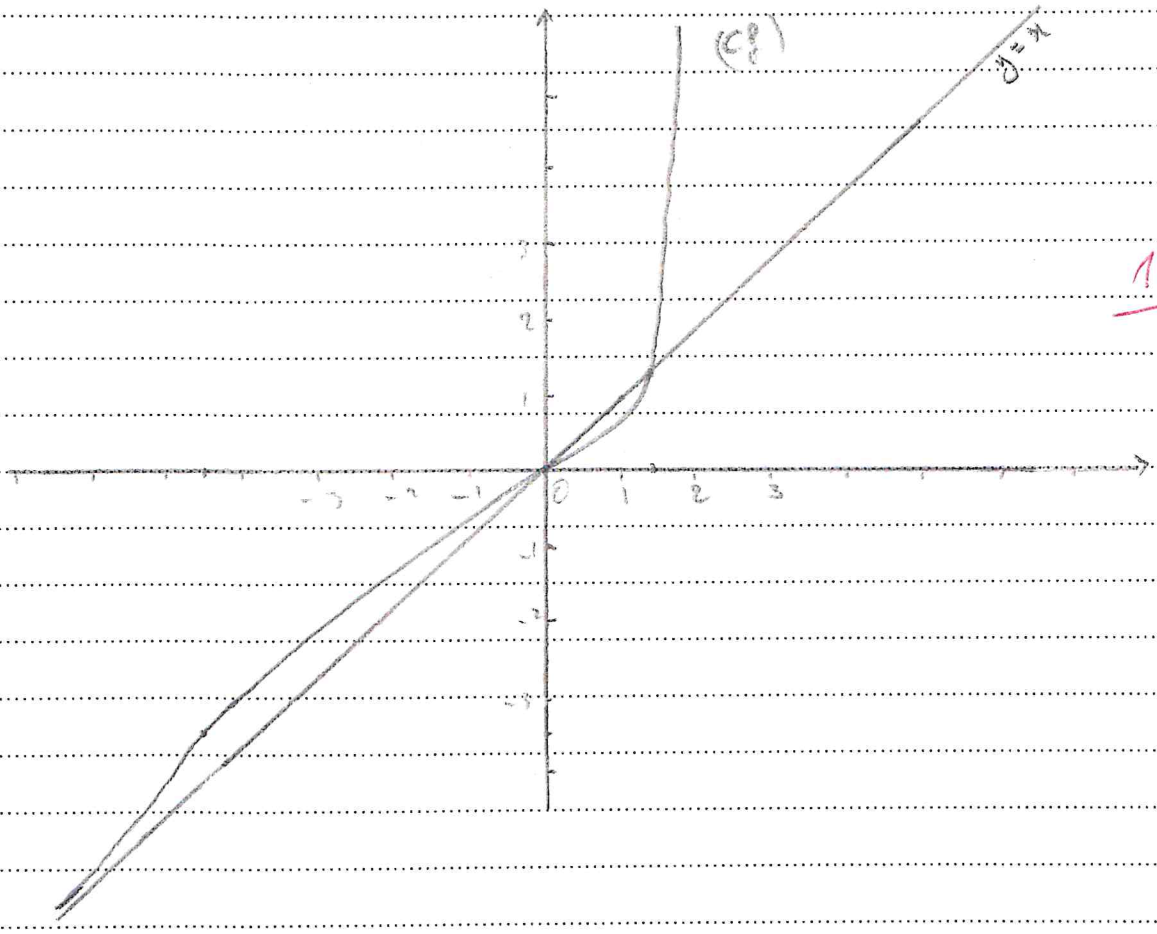
....

Sur Vingt

Appréciation expliquant la note chiffrée :

....

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....



1

0.5

7- أ- : بما أن الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن تقبل دالة عكسية معرفة على $\mathbb{R}$

ب- لنحسب $(f^{-1})'(\ln 4)$ ،

لدينا $f(\ln 4) = \ln 4$ إذن $f^{-1}(\ln 4) = \ln 4$

ولدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\ln 4$ و $f'(\ln 4) = 1 + \ln 16$

إذن $f'(\ln 4) \neq 0$ ومنه الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $\ln 4$

ومنه، $(f^{-1})'(\ln 4) = \dfrac{1}{f'(\ln 4)} = \dfrac{1}{1 + \ln 16}$ 0.25

النقطة النهائية
/20
على عشرون

الشعبة / المسلك : ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

....

إسم المصحح وتوقيعه (ها) : ....

خاص بالأكاديمية
....

8- أ- من أجل $n=0$ لدينا $U_0=1$ إذن $0<1<\ln 4$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

ليكن n من IN، نفترض أن $0<U_n<\ln 4$، لنبين أن $0<U_{n+1}<\ln 4$

لدينا حسب نتيجة السؤال (4-ب) الدالة f تزايدية قطعا على IR

ولدينا حسب افتراض الترجع $0<U_n<\ln 4$

إذن $f(0)<f(U_n)<f(\ln 4)$

$0<U_{n+1}<\ln 4$ 0,5

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$، إذن حسب مبدأ الترجع $0<U_n<\ln 4$ لكل n من IN

ب- رتابة (U_n) 0,5

لدينا حسب نتيجة السؤال (3-ب) $f(x)<x$ لكل x من $[0,\ln 4]$

ولدينا $U_n\in[0,\ln 4]$

من أجل $U_n=x$ لدينا $f(U_n)<U_n$ $(\forall n\in IN)$

إذن $U_{n+1}<U_n$ $(\forall n\in IN)$

ومنه المتتالية (U_n) تناقصية.

ج- بما أن (U_n) تناقصية ومصغورة إذن فهي متقاربة.

د- نهاية (U_n) 0,5

لدينا الدالة f متصلة على $[0,\ln 4]$

لدينا $U_0\in[0,\ln 4]$ و $f(U_n)=U_{n+1}$ $(\forall n\in IN)$

ولدينا $f[0,\ln 4]=[0,\ln 4]$ إذن $f[0,\ln 4]\subset[0,\ln 4]$

ولدينا (U_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (U_n) حل للمعادلة $f(x)=x$ على $[0,\ln 4]$

لدينا حسب منحنى الدالة f (السؤال 6) (C_f) يقطع المستقيم $y=x$ في نقطتين أفصولهما على التوالي 0 و $\ln 4$

إذن حلول المعادلة $f(x)=x$ على $[0,\ln 4]$ هي

ولدينا $U_0=1$ و (U_n) تناقصية إذن

$\lim U_n=0$

التمرين الثاني

1- تحقق النقطة D :

لدينا المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

ولدينا النقطة D صورة النقطة B بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{OA}$، إذن،

$$\vec{BD} = \vec{OA}$$

مع لحق المتجهة $\vec{OA}$ هو $-1-i\sqrt{3}$

ولحق المتجهة $\vec{BD}$ هو $d+1-i\sqrt{3}$

إذن، $d+1-i\sqrt{3} = -1-i\sqrt{3}$

ومنه، $\boxed{d=-2}$

2- لحق النقطة C،

~~لدينا النقطة C صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه D وزاويته $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ إذن،~~

$$c-d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(c- \ )$$

~~مع،~~ $$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

~~إذن،~~ $$c = e^{i\frac{2\pi}{3}}c - e^{i\frac{2\pi}{3}}b + b$$

$$c\left(1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)+i\sqrt{3}-1$$

$$= -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)+i\sqrt{3}-1$$

$$c\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\left(-1-i\sqrt{3}\right)+i\sqrt{3}-1$$

$$= 1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}$$

$$c\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2i\sqrt{3}$$

$$c = 2i\sqrt{3}\left(\frac{2}{3-\sqrt{3}i}\right) =$$

2- لحق النقطة C،

لدينا C صورة B بالدوران R الذي مركزه D وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ إذن،

$$c-d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-d)$$

$$c = e^{i\frac{2\pi}{3}}b - de^{i2\pi/3} + d$$

مع $$e^{i2\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إذن، $$c = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)+2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{3}{2}+i\sqrt{3}-1-2$$

$$\boxed{c=-4}$$

3- أ-

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1+i\sqrt{3}+4}{-1-i\sqrt{3}+4} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{(3+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{9+3}$$

$$= \frac{9+3i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{12}$$

لدينا: $\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

إذن: $\frac{b-c}{a-c} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{b-c}{a-c} = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ب- $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$

حسب موافر $= \cos 2\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

إذن: $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 0.5

مع: $R(B)=C \iff c-d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-d)$

إذن: $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{c-d}{b-d}$

إذن: $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4- أ- ~~لدينا~~

لدينا: $|z+2| = |z-(-2)|$

$|z+2| = |z-d|$

$= DM$ 0.25

بما أن D هي مركز الدائرة (Γ) و $M\in(\Gamma)$ فإن: $DM=2$

أي $|z+2|=2$

ب- لدينا: $z\bar{z} = |z|^2 = 16$ إذن: $\bar{z} = \frac{16}{z}$

ومنه: $z+\bar{z} = z+\frac{16}{z}$ 0.5

$= z+\frac{16}{4}$

إذن: $z+\bar{z} = -4-4 = -8$