ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

486971

Série / Option :

Composition de :

RESERVE A L'ACADEMIE

Note Définitive
20,00 /20
عشرون
Sur Vingt

Appréciation expliquant la note chiffrée :

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : Abdellatif Ait Alhoussaleh

Exercice 1.

1) a) Le domaine de définition de l'équation est : $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $e^{2x}-4e^{x}+3=0 \iff (e^{x})^2-4e^{x}+3=0$

Posons $X=e^{x}$: l'équation devient : $X^2-4X+3=0$

$X^2-4X+3=0 \iff (X-1)(X-3)=0$ 0,5

$\iff X-1=0$ ou $X-3=0$

$\iff X=1$ ou $X=3$

donc : $e^{2x}-4e^{x}+3=0 \iff e^{x}=1$ ou $e^{x}=3$

$\iff x=0$ ou $x=\ln(3)$

Par suite : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est : } S=\{0;\ln(3)\}}$

1) b) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $e^{2x}-4e^{x}+3<0$

et on a d'après 1)a) : $e^{2x}-4e^{x}+3=0 \iff x=0$ ou $x=\ln(3)$ 0,5

donc :

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
$e^{2x}-4e^{x}+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est : } S=]0,\ln(3)[}$

1) c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{x}-1)(e^{x}-3)}{(e^{x}-1)(e^{x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-3}{e^{x}+1}=\dfrac{-2}{2}=-1$ 0,5

car : $\lim\limits_{x\to0}(e^{x}-3)=-2$ et $\lim\limits_{x\to0}(e^{x}+1)=2$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=-1}$

2) Soit u la fonction définie par : $(\forall x\in\mathbb{R})$, $u(x)=e^{2x}+e^{x}+4x$ 0,5

on a : $x\mapsto e^{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1,0]$.

et la fonction : $x\mapsto 4x$ est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1,0]$. donc : $u: x\mapsto e^{2x}+e^{x}+4x$ est continue sur $[-1,0]$. ①

et on a : $u(-1)=e^{-2}+e^{-1}-4=-3,49\ldots$ et $u(0)=e^{0}+e^{0}+0=2$

امتحان شهادة البكالوريا

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

النقطة النهائية
/20
على عشرون

الشعبة / المسلك :

مـــادة :

خاص بالأكاديمية

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح وتوقيعه (ها) :

on a : $u(-1)<0$ et $u(0)>0$ donc $u(-1)\times u(0)<0$ ②.

De ① et ② et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x)=0$ admet une solution dans $[-1,0]$

Par suite : $\boxed{\text{l'équation } e^{2x}+e^{x}+4x=0 \text{ admet une solution dans l'intervalle } [-1,0]}$.

Exercice 2 :

1) $U_1=\frac{U_0}{3-2U_0}=\frac{\frac{1}{2}}{3-2\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$ donc $\boxed{U_1=\frac{1}{4}}$

0,25

2) Pour $n=0$:

On a : $U_0=\frac{1}{2}$ et $0<\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$ donc $0<U_0\leqslant\frac{1}{2}$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

Supposons que : $0<U_n\leqslant\frac{1}{2}$ et montrons que $0<U_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$:

• On a : $0<U_n\leqslant\frac{1}{2}$ donc $2U_n\leqslant 1$ donc $-2U_n\geqslant -1$ donc $3-2U_n\geqslant 2>0$

donc $\frac{U_n}{3-2U_n}>0$ soit $U_{n+1}>0$ ①

0,5

• et on a : $U_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{U_n}{3-2U_n}-\frac{1}{2}=\frac{2U_n-3+2U_n}{2(3-2U_n)}=\frac{4U_n-3}{2(3-2U_n)}$

on a : $0<U_n\leqslant\frac{1}{2}$ donc $3-2U_n>0$ et $4U_n\leqslant 2$ donc $4U_n-3\leqslant -1\leqslant 0$

donc $\frac{4U_n-3}{2(3-2U_n)}\leqslant 0$ soit : $U_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$ ②

De ① et ② : $0<U_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$

par suite : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) : 0<U_n\leqslant\frac{1}{2}}$

3) a) Soit $n\in\mathbb{N}$.

on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{U_n}{3-2U_n}}{U_n}=\frac{1}{3-2U_n}$

0,5

or on a d'après 2) $U_n\leqslant\frac{1}{2}$ donc $-2U_n\geqslant -1$ donc $3-2U_n\geqslant 2$ donc $\frac{1}{3-2U_n}\leqslant\frac{1}{2}$

donc : $\frac{U_{n+1}}{U_n}\leqslant\frac{1}{2}$

2

Par suite : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) : \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{1}{2}}$

3)b) Soit $n\in\mathbb{N}$.

on a : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \leq 1$ donc : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ donc : $U_{n+1} \leq U_n$

donc : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $U_{n+1} \leq U_n$ 0,5

Par suite : $\boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ est décroissante.}}$

4)a) Pour $n=0$.

On a : $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0+1} = \dfrac{1}{2}$ et $0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}$ donc : $0 < U_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0+1}$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

Supposons que : $0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ et montrons que : $0 < U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

on a : $0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ donc : $0 < \dfrac{1}{2}U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$ 0,5

et on a d'après 3)a) : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{1}{2}$ donc : $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$

donc : $U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$ et on a d'après 2) : $U_n > 0$ donc : $U_{n+1} > 0$

donc : $0 < U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

par suite : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) : \quad 0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

0,25

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

puisque : $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$

donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$

4)b) On a : (U_n) est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-2U_n) = 3$

et on a la fonction $\ln$ est continue en 3. 0,5

donc : $\boxed{\text{la suite } V_n \text{ définie par : } V_n = \ln(3-2U_n) \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ln(3)}$

5)a) Soit $n\in\mathbb{N}$.

on a : $\dfrac{1}{U_{n+1}} - 1 = \dfrac{1}{\dfrac{U_n}{3-2U_n}} - 1 = \dfrac{3-2U_n}{U_n} - 1 = \dfrac{3-2U_n-U_n}{U_n} = \dfrac{3-3U_n}{U_n}$

donc : $\dfrac{1}{U_{n+1}} - 1 = \dfrac{3}{U_n} - \dfrac{3U_n}{U_n} = \dfrac{3}{U_n} - 3 = 3\left(\dfrac{1}{U_n} - 1\right)$ 0,5

Par suite $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) : \quad \dfrac{1}{U_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{U_n} - 1\right)}$

5) b) Soit la suite (W_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $W_n = \frac{1}{U_n} - 1$

d'après 5) a) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{1}{U_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$ donc : $W_{n+1} = 3W_n$

donc : (W_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

donc : $W_n = W_0 \times q^n = W_0 \times 3^n$

Son premier terme est : $W_0 = \frac{1}{U_0} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$ 0,5

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $W_n = 3^n$

et on a : $W_n = \frac{1}{U_n} - 1$ donc : $\frac{1}{U_n} = W_n + 1$

donc : $U_n = \frac{1}{W_n + 1}$ donc : $U_n = \frac{1}{3^n + 1}$

Par suite : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n = \frac{1}{3^n + 1}}$

Exercice 2.

1) le discriminant de l'équation est : $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 3 - 4 = -1$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ 0,75

Par suite : $\boxed{\text{l'ensemble de solutions de l'équation est : } S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \,;\, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right\}}$

2) a) On a : $a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

par suite : $\boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$ 0,25

2) b) On a : $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ donc : $\bar{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

donc : $\bar{a} \cdot b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

donc : $\boxed{\bar{a}b = \sqrt{3}}$

0,5

3) On a d'après 2) b) $\bar{a} \cdot b = \sqrt{3}$ donc : $a \cdot \bar{a} \cdot b = \sqrt{3}\, a$

et on a : $a \cdot \bar{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ 0,5

donc : $b = \sqrt{3}\, a$ donc : $b - 0 = \sqrt{3}(a - 0)$ donc : $h(A) = B$

par suite : $\boxed{\text{B est l'image du point A par l'homothétie } h \text{ de centre O et de rapport } \sqrt{3}.}$

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Série / Option : ....

Composition de : ....

RESERVE A L'ACADEMIE

Note Définitive
.... /20
....
Sur Vingt

Appréciation expliquant la note chiffrée :

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Suite de l'exercice 2.

4) a) On a : $R(M) = M'$ donc : $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$

donc : $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a) + a$

et on a : $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$ 0,5

par suite : $\boxed{z' = i(z-a)+a}$

4) b) On a : $R(C) = D$ donc : $d = i(z_C - a) + a$ et on a : $z_C = \bar{a}$

donc : $d = i(\bar{a} - a) + a$

et on a : $\bar{a} - a = -(a - \bar{a}) = -i \times \frac{1}{2} \times 2 = -i$ donc : $d = -i^2 + a$ 0,25

par suite : $\boxed{d = a + 1}$

4) c) On a : $d = a + 1$ donc : $d = a + z_I$ donc : $d - a = z_I$

donc : $d - a = z_I - 0$ donc : $\text{aff}(\vec{AD}) = \text{aff}(\vec{OI})$

donc : $\vec{AD} = \vec{OI}$ donc : ADIO est un parallélogramme (1)

et on a : $d - a = 1$ donc : $|d - a| = 1$ donc : $AD = 1$

et on a : $|a| = 1$ donc : $OA = 1$ donc : $AD = OA$ (2) 0,5

De (1) et (2) : $\boxed{\text{Le quadrilatère ADIO est un losange}}$

5) a) On a : $d - b = a + 1 - (\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 1 - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc : $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1 + i - i\sqrt{3}}{2}$

et on a : $\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 1 + i}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 + i - i\sqrt{3}}{2}$ 0,25

donc : $\boxed{d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)}$

on a : $\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$ 0,5

N.B. : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

donc : $\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\pi}{4}\right]$

donc : $\arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ et puisque : $d-b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

donc : $\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

par suite : $\boxed{\text{un argument du nombre } d-b \text{ est } -\frac{\pi}{4}}$

5)b) On a : $1-b = 1-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc : $1-b = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

par suite : $\boxed{1-b = \left[1, -\frac{2\pi}{3}\right]}$ 0,5

5)c) On a : $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{z_I-b}\right)\,[2\pi]$

$\equiv \arg(d-b) - \arg(1-b)\,[2\pi]$

et on a d'après 5)a) : $\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ et d'après 5)b) : $\arg(1-b) \equiv -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

donc : $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) \equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ 0,5

$\equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

par suite : $\boxed{\text{une mesure de l'angle } (\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}}) \text{ est } \frac{5\pi}{12}}$

Problème

1) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x) - 2x = 0$ 0,5

car : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -2x = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

par suite : $\boxed{f \text{ est continue à droite au point } 0}$

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x(\ln(x) - 1)$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x) - 1) = +\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x(\ln(x) - 1) = +\infty$ 0,75

par suite : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2)b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\ln(x) - 2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x(\ln(x) - 1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2(\ln(x) - 1) = +\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x) - 1) = +\infty$ puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

0,5

par suite : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty}$

Interprétation géométrique :

> (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3)a) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x\ln(x) - 2x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x(\ln(x) - 1)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} 2(\ln(x) - 1) = -\infty$

car : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ 0,75

donc : f n'est pas dérivable à droite au point 0.

Interprétation géométrique.

> (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point $O(0,0)$ à droite.

3)b) Soit $x \in]0, +\infty[$.

on a : $f(x) = 2x\ln(x) - 2x$

donc : $f'(x) = 2\left(1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right) - 2 = 2(\ln(x) + 1) - 2 = 2\ln(x) + 2 - 2 = 2\ln(x)$

par suite : $\boxed{(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = 2\ln(x)}$ 0,5

3)c) On a : $(\forall x \in]0, +\infty[)$: $f'(x) = 2\ln(x)$.

donc : • Si $x \in]0, 1]$, $\ln(x) \leq 0$ donc : $f'(x) \leq 0$

• Si $x \in [1, +\infty[$: $\ln(x) \geq 0$ donc : $f'(x) \geq 0$

Le tableau de variations de la fonction f est : 0,5

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$

$f(1) = 2 \times 1 \times \ln(1) - 2 \times 1$

$= 0 - 2 = -2$

4)a) • Soit $x \in]0,+\infty[$.

on a : $f(x) = 0 \iff 2x\ln(x) - 2x = 0$

$\iff 2x(\ln(x) - 1) = 0$

$\iff x = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = e$

0,5

on a : $0 \notin]0,+\infty[$ et $e \in]0,+\infty[$.

donc $\boxed{\text{l'ensemble de solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est : } S = \{e\}}$

• Soit $x \in]0,+\infty[$.

on a : $f(x) = x \iff 2x(\ln(x) - 1) = x$

$\iff 2(\ln(x) - 1) = 1$

$\iff \ln(x) - 1 = \frac{1}{2}$

$\iff \ln(x) = \frac{3}{2}$

$\iff x = e^{3/2}$

donc, $\boxed{\text{l'ensemble de solutions de l'équation } f(x) = x \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est : } S = \{e^{\frac{3}{2}}\}}$

4)b)

Voir courbe

8

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Série / Option : ....

Composition de : ....

RESERVE A L'ACADEMIE
....

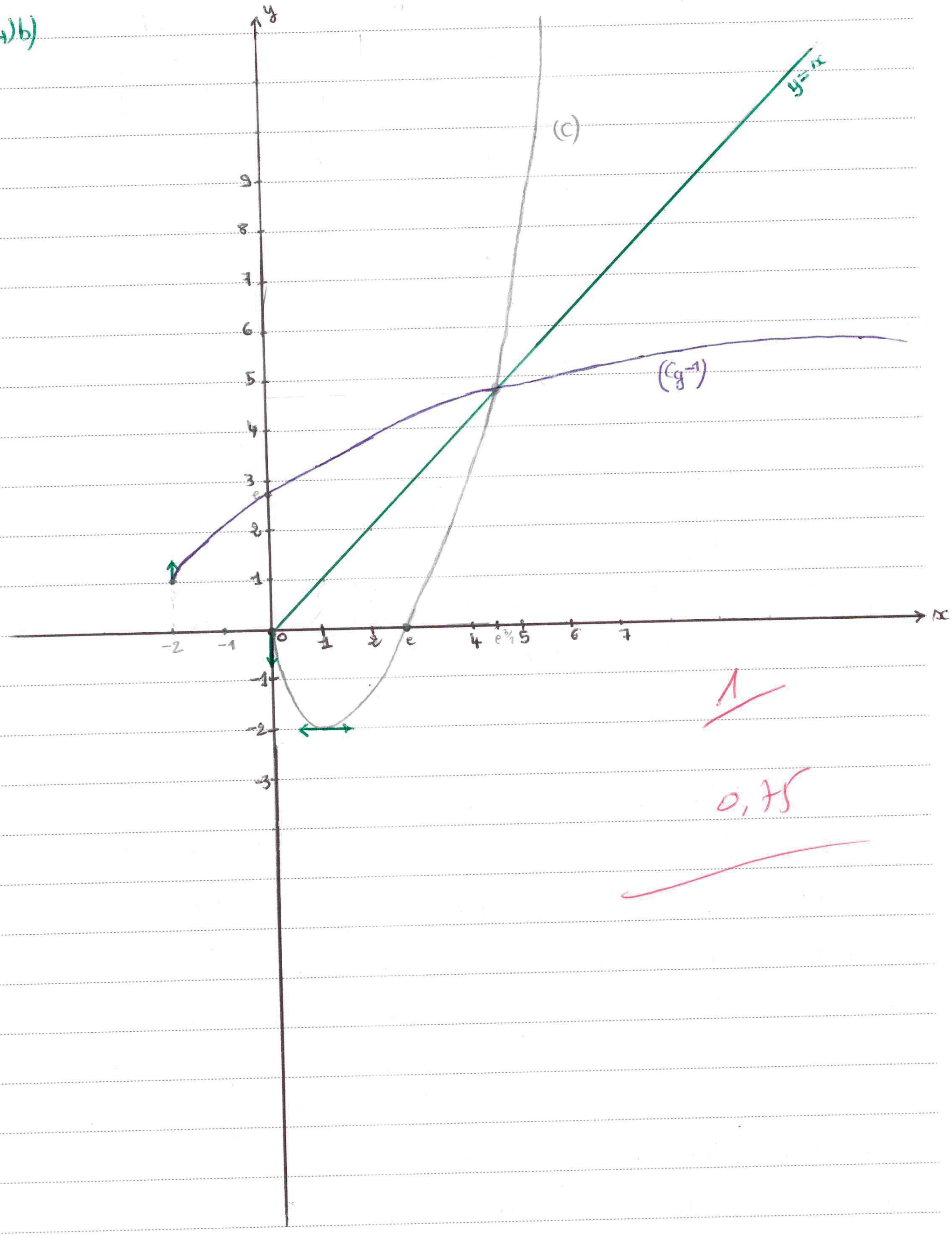
Note Définitive
.... /20
....
Sur Vingt

Appréciation expliquant la note chiffrée :

....

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

4)b)



1

0,75

N.B. : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

5)a) Posons $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$\int_1^e x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2\ln(x)}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

0,5

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{e^2+1}{4}$$

Par suite : $\boxed{\int_1^e x\ln(x)\,dx = \frac{e^2+1}{4}}$

5)b) $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e (2x\ln(x) - 2x)\,dx = 2\int_1^e x\ln(x)\,dx - \int_1^e 2x\,dx$

donc : $\int_1^e f(x)\,dx = \frac{2(e^2+1)}{4} - [x^2]_1^e = \frac{e^2+1}{2} - e^2 + 1 = \frac{-e^2+3}{2}$

0,5

Par suite : $\boxed{\int_1^e f(x)\,dx = \frac{-e^2+3}{2}}$

6)a) D'après le tableau de variations de f.

f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.

0,25

donc : $f(1) = -2$ est le minimum absolu de f sur $]0,+\infty[$.

par suite : $\boxed{(-2) \text{ est le minimum de } f \text{ sur }]0,+\infty[.}$

6)b) Soit $x \in]0,+\infty[$.

on a : (-2) est le minimum ~~absolu~~ de f sur $]0,+\infty[$.

donc : $f(x) \geq -2$ donc : $2x\ln(x) - 2x \geq -2$

donc : $2x(\ln(x) - 1) \geq -2$

0,5

donc : $\ln(x) - 1 \geq \frac{-1}{x}$

donc $\ln(x) \geq -\frac{1}{x} + 1$ donc $\ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$

par suite $\boxed{(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}}$

7)a) On a : f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

et g est la restriction de f sur $[1,+\infty[$.

donc g est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J tel que : 0,5

$J = g([1,+\infty[) = [g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)[= [-2,+\infty[$

par suite : $\boxed{g \text{ admet une fonction réciproque } g^{-1} \text{ définie sur } J = [-2,+\infty[}$

7)b) (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

(Voir courbe).

8)a) On a : $h(0) = 0^3 + 3\times 0 = 0$

- $\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} x^3 + 3x = 0$
- $\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} 2x\ln(x) - 2x = 0$ car : $\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to0^+} -2x = 0$

donc : $\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^+} h(x) = h(0)$

donc $\boxed{h \text{ est continue au point } 0.}$ 0,5

8)b) $\lim_{x\to0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{x^3+3x}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{x(x^2+3)}{x} = \lim_{x\to0^-} x^2+3 = 3$ car $\lim_{x\to0^-} x^2 = 0$

on a : $3 \in \mathbb{R}$ donc h est dérivable à gauche au point 0 et $h'_g(0) = 3$

Interprétation géométrique : 0,5

(C_h) admet une demi-tangente de coefficient directeur 3 au point $O(0,0)$ à gauche : d'équation : $y = h'_g(0)(x-0) + h(0) = 3x$

8)c) On a : h est dérivable à gauche au point 0.

or, d'après 3)a) : $\lim_{x\to0^+} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{h(x)}{x} = +\infty$

donc : h n'est pas dérivable à droite au point 0.

Par suite : $\boxed{h \text{ n'est pas dérivable au point } 0}$ 0,25