2ème Bac pc Bif

Correction examen National
Mathématiques (2020 S.N)

Exercice 1 :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{2U_n+5} \\ U_0 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

1) Calculer U_1 :

On a $U_1 = \dfrac{2U_0}{2U_0+5} = \dfrac{2\times\frac{3}{2}}{2\times\frac{3}{2}+5} = \dfrac{3}{8}$.

2) Montrons que $U_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

→ pour $n=0$ On a $U_0 = \frac{3}{8} > 0$ vrai

→ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$

et montrons que $U_{n+1} > 0$

On a $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{2U_n+5}$

puisque $U_n > 0$ alors $2U_n > 0$ (1)

et $2U_n + 5 > 5 > 0$ (2)

de (1) et (2) on a $U_{n+1} > 0$.

→ Par application du principe de la récurrence on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n > 0$

3) a) Montrons que $0 < U_{n+1} \leq \frac{2}{5} U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

d'après la question précédente on a ;

$U_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

càd $U_{n+1} > 0$ (1)

D'autre part $u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n = \frac{2u_n}{2u_n+5} - \frac{2}{5}u_n$

$$= \frac{5(2u_n) - 2u_n(2u_n+5)}{5(2u_n+5)}$$

$$= \frac{\cancel{10u_n} - 4u_n^2 - \cancel{10u_n}}{5(2u_n+5)}$$

$$= \frac{-4u_n^2}{5(2u_n+5)} < 0 \quad (2)$$

car $-4u_n^2 < 0$ et $5(2u_n+5) > 0$

de (1) et (2) on déduit que

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n.$$

En déduire que $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Par récurrence</u> :

→ pour $n=0$ on a : $0 < u_0 = \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0$ vrai.

→ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

et montrons que $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

d'après la question précédente on a ;

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n \quad (1)$$

et on a ; $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

D'où $0 < \frac{2}{5}u_n \leq \frac{3}{2}\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

D'où $0 < \frac{2}{5}u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \quad (2)$

de (1) et (2) on déduit que : $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

→ Par application du P.R on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

b) Déduction de la limite de (U_n)

On a $0 \leq U_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{5} < 1$

Alors d'après le critère de convergence on a :

Finalement ; $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

4) On pose $V_n = \dfrac{4U_n}{2U_n + 3}$.

a) Montrons que (V_n) géométrique de raison $\frac{2}{5}$

On a $V_{n+1} = \dfrac{4U_{n+1}}{2U_{n+1} + 3} = \dfrac{4\dfrac{2U_n}{2U_n+5}}{2\dfrac{2U_n}{2U_n+5} + 3}$

$$= \frac{\dfrac{8U_n}{\cancel{2U_n+5}}}{\dfrac{4U_n + 3(2U_n+5)}{\cancel{2U_n+5}}} = \frac{8U_n}{4U_n + 6U_n + 15}$$

$$= \frac{8U_n}{10U_n + 15} = \frac{2}{5}\left(\frac{4U_n}{2U_n + 3}\right)$$

$$= \frac{2}{5} V_n$$

D'où (V_n) géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) Ecrire V_n en fonction de n.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0 \times 9^{n-0}$

D'où $V_n = \dfrac{4U_0}{2U_0 + 3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$V_n = \frac{4 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 3} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$V_n = \frac{6}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

D'où $V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Déduction de U_n en fonction de n.

On sait que $V_n = \dfrac{4U_n}{2U_n + 3}$.

D'où $V_n(2U_n + 3) = 4U_n$.

$$2V_n U_n + 3V_n = 4U_n.$$

$$2V_n U_n - 4U_n = -3V_n$$

$$U_n(2V_n - 4) = -3V_n.$$

$$U_n = \frac{-3V_n}{2V_n - 4}$$

D'où $U_n = \dfrac{3V_n}{4 - 2V_n}$

D'où $U_n = \dfrac{3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}{4 - 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 :

I) (E) : $z^2 - 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z + 16 = 0$

a) Montrons que $\Delta = -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$.

On sait que $\Delta = b^2 - 4ac$

avec $a = 1$; $b = -2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ et $c = 16$.

D'où $\Delta = \left(-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right)^2 - 4 \times 1 \times 16$

$\Delta = 4(2 + 2\sqrt{2}.\sqrt{6} + 6) - 64$.

$\Delta = 32 + 8\sqrt{12} - 64$.

$\Delta = -32 + 8\sqrt{12}$.

D'autre part ; $-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = -4(6 - 2\sqrt{12} + 2)$

$= -32 + 8\sqrt{12}$.

D'où $\Delta = -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$.

b) Déduction des solutions :

On a $\Delta = -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 < 0$

D'où l'équation (E) admet deux solution conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i\sqrt{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2} + \frac{2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$

$$z_1 = (\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

et $$z_2 = \overline{z_1} = (\sqrt{2}+\sqrt{6}) - i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

D'où $S = \{ (\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2}), (\sqrt{2}+\sqrt{6}) - i(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \}$.

2) Soient $a = \sqrt{6}+\sqrt{2} + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $b = 1 + i\sqrt{3}$

et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a) Vérifions que $b\bar{c} = a$.

On a $$b\bar{c} = (1+i\sqrt{3})\overline{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}$$
$$= (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$
$$= \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6}.$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6} + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$= a.$$

En déduire que $ac = 4b$.

On a $b\bar{c} = a$.

D'où $b\bar{c}c = ac$

On sait que $\bar{c}c = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$
$$= 2+2 = 4.$$

D'où $b \times 4 = ac$

càd $ac = 4b$.

b) Ecriture de b et c sous forme trigonométrique

→ On a $b = 1 + i\sqrt{3}$.

On sait que $|b| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$.

D'où $b = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

càd $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

→ On a $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

On sait que $|c| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$.

D'où $c = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

càd $c = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

c) Déduction de $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

On sait que $ac = 4b$.

D'où $a = \frac{4b}{c}$.

or $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$c = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

D'où $a = \frac{4 \times \cancel{2} e^{i\frac{\pi}{3}}}{\cancel{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = 4e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{4}}$

$a = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$

D'où $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

3) a) Vérifions que $z' = \frac{1}{4} a z$.

On a $M(z)$ et $M'(z')$ tel que $R(M) = M'$

D'où $z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{12}}(z - 0)$

$$z' = e^{i\frac{\pi}{12}} z.$$

et puisque $a = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ alors $\frac{a}{4} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

D'où $z' = \frac{a}{4} z$.

b) Déterminons l'image de C par R.

On pose $R(C) = C'$.

D'où $c' = \frac{a}{4} c$

or $ac = 4b$ (d'après 2) a))

D'où $c' = \frac{4b}{4} = b$.

D'où $R(C) = B$.

c) On a $R(C) = B \iff \begin{cases} OC = OB \\ (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{cases}$.

D'où OBC est un triangle isocèle.

d) Montrons que $a^4 = 128b$.

On sait que $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

D'où $a = 4\, e^{i\frac{\pi}{12}}$.

D'où $a^4 = \left(4\, e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4$.

$a^4 = 4^4\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

$a^4 = 256\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$a^4 = 128 \times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

D'où $a^4 = 128\, b$.

En déduire que O, B et D sont alignés.

On a $a^4 = 128\, b$.

et $d = a^4$.

D'où $d = 128\, b$.

$\frac{d}{b} = 128$.

D'où $\frac{d-0}{b-0} = 128 \in \mathbb{R}$.

D'où O, B et D sont alignés.

Exercice 3 :

$$g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

1) a) Montrons $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$ $\forall x \in]0, +\infty[$.

On a $g'(x) = \left(2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)\right)'$

$$= \left(2\sqrt{x}\right)' - 2' - \ln'(x)$$

$$= \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}^2} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}.$$

b) Montrons que $g \nearrow$ sur $[1, +\infty[$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $\sqrt{x}-1$

et on a :

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	

D'où $\sqrt{x}-1 \geq 0$ $\forall x \in [1, +\infty[$.

càd $g'(x) \geq 0$ $\forall x \in [1, +\infty[$.

càd $g \nearrow$ sur $[1, +\infty[$.

c) En déduire que $0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$ $\forall x \in [1, +\infty[$

→ On sait que $\ln(x) \geq 0$ $\forall x \in [1, +\infty[$ (1)

→ $\forall x \in [1, +\infty[$ on a $x \geq 1$

et $g \nearrow$ sur $[1,+\infty[$.

D'où $g(x) \geq g(1)$.

D'où $2\sqrt{x} - 2 - \ln(x) \geq 0$.

càd $2\sqrt{x} - 2 \geq \ln(x)$.

D'où $\ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que :

$\forall x \in [1,+\infty[$; $0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$

d) Montrons que $\forall x \in [1,+\infty[$; $0 \leq \frac{(\ln(x))^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$

On a $\forall x \in [1,+\infty[$; $0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$.

D'où $0 \leq (\ln(x))^3 \leq (2\sqrt{x})^3 = 8x\sqrt{x}$.

D'où $\frac{1}{x^2} \times 0 \leq \frac{1}{x^2} \times (\ln(x))^3 \leq \frac{1}{x^2} \times 8x\sqrt{x}$.

Finalement ; $0 \leq \frac{(\ln(x))^3}{x^2} \leq \frac{8\sqrt{x}}{x} = \frac{8}{\sqrt{x}}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2}$.

On a ; $0 \leq \frac{(\ln(x))^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ $\forall x \in [1,+\infty[$.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2} \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{\sqrt{2}}$

D'où $0 \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2} \leq 0$.

càd $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2} = 0$.

2) a) Montrons que G est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

$\forall x \in]0, +\infty[$; $G'(x) = \left(x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x)\right)\right)'$

$= x'\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x)\right) + x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x)\right)'$

$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) + x\left(\frac{4}{3}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$

$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) + \frac{2x}{3\sqrt{x}} - 1$

$= -2 + \frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x}^2}{3\sqrt{x}} - \ln(x)$.

$= -2 + \frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x}}{3} - \ln(x)$.

$= -2 + \frac{6\sqrt{x}}{3} - \ln(x)$.

$= 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)$

$= g(x)$

D'où G primitive de g sur $]0, +\infty[$.

b) Calculons $\int_1^4 g(x)\,dx$.

On a $\int_1^4 g(x)\,dx = \left[G(x) \right]_1^4$

$= G(4) - G(1)$

On a $G(4) = 4\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{4} - \ln(4)\right)$

$= 4\left(-1 + \frac{8}{3} - 2\ln(2)\right)$

$= 4\left(\frac{5}{3} - 2\ln(2)\right)$.

$= \frac{20}{3} - 8\ln(2)$

$G(1) = 1\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{1} - \ln(1)\right)$

$= -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$.

D'où $\int_1^4 g(x)\,dx = \frac{20}{3} - 8\ln(2) - \frac{1}{3}$.

$= \frac{19}{3} - 8\ln(2)$.

<u>Problème</u> :

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-1}\left(e^{x-2} - 4\right).$$

1) Montrons que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right) = -\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} -x + \frac{5}{2} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} e^{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} e^{x-2} - 4 = +\infty \end{cases}$

Montrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} e^{x-2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-2} - 4 = -4. \end{cases}$

2) a) Montrons que $(\Delta) : y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote de $(\mathcal{C}_f)$ au $V(-\infty)$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to -\infty} \cancel{-x + \frac{5}{2}} - \frac{1}{2} e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \cancel{(-x + \frac{5}{2})}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = 0$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} e^{x-2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-2} - 4 = -4. \end{cases}$

D'où $(\Delta) : y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au $V(-\infty)$.

b) En résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$

On a $e^{x-2} - 4 = 0 \iff e^{x-2} = 4$

$\iff x - 2 = \ln(4)$

$\iff x$

D'où $S = \{2 + \ln(4)\}$

La position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ).

On a $f(x)-y = \cancel{-x+\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4) - \cancel{(-x+\frac{5}{2})}$

$= -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$.

Le signe de $f(x)-y$ est celui $-\frac{1}{2}(e^{x-2}-4)$.

On a

x	$-\infty$		$2+\ln(4)$		$+\infty$
$e^{x-2}-4$		$-$	0	$+$	
$-\frac{1}{2}(e^{x-2}-4)$		$+$	0	$-$	

D'où

x	$-\infty$		$2+\ln(4)$		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
La Position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ)		$(\mathcal{C}_f)$ au dessus de (Δ)	$(\mathcal{C}_f)\cap(\Delta)$ $A(2+\ln(4), f(2+\ln(4)))$	$(\mathcal{C}_f)$ en dessous de (Δ)	

3) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2x}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$.

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2x}e^{x}e^{-2}(e^{x}e^{-2}-4)$

$$= \lim_{x \to +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{e^{-2}}{2}\frac{e^{x}}{x}\left(e^{x}e^{-2} - 4\right) = -\infty$$

car
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -1 + \frac{5}{2x} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{e^{-2}}{2}\frac{e^{x}}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}e^{-2} - 4 = +\infty . \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au $V(+\infty)$.

4) a) Montrons que $f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

On a $f'(x) = \left(-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)\right)'$

$$= -1 - \frac{1}{2}\left(\left(e^{x-2}\right)'\left(e^{x-2} - 4\right) + e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)'\right)$$

$$= -1 - \frac{1}{2}\left(e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right) + e^{x-2}\left(e^{x-2}\right)'\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\left(e^{2x-4} - 4e^{x-2} + e^{2x-4}\right)$$

$$= -1 - \frac{1}{2}\left(2e^{2x-4} - 4e^{x-2}\right)$$

$$= -1 - e^{2x-4} + 2e^{x-2}$$

$$= -\left(e^{2x-4} - 2e^{x-2} + 1\right)$$

$$= -\left(\left(e^{x-2}\right)^2 - 2e^{x-2} + 1\right)$$

$$= -\left(e^{x-2} - 1\right)^2 .$$

b) le tableau de variation de f :

On pose $f'(x) = 0 \iff -(e^{x-2} - 1)^2 = 0$

$\iff e^{x-2} - 1 = 0$

$\iff e^{x-2} = 1$

$\iff x - 2 = 0$

$\iff x = 2$:

D'_{ou}

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

5) Calculons $f''(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a ; $f''(x) = \left(-(e^{x-2} - 1)^2\right)'$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$= -2(e^{x-2} - 1)'(e^{x-2} - 1)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$= -2(e^{x-2})(e^{x-2} - 1)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$= -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Montrons que $A(2,2)$ point d'inflexion de $(\mathcal{C})$

On a $f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $-2(e^{x-2}-1)$ car $e^{x-2}>0$.

On pose $-2(e^{x-2}-1)=0 \iff e^{x-2}=1$

$\iff x-2=0$

$\iff x=2$.

D'autre part ;

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^{x-2}-1$		$-$	0	$+$	
$-2(e^{x-2}-1)$		$+$	0	$-$	

D'où

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et ses pts d'inflexion		$\cup$	$A(2,2)$ point d'inflexion	$\cap$	

NB : $f''(2)=0$ et f'' change de signe au $V(2)$. D'où $A(2,2)$ point d'inflexion.

6) Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in]2+\ln(3), 2+\ln(4)[$.

✓ <u>La continuité de f :</u>

On a $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)$.

$x \xmapsto{f_1} -x + \frac{5}{2}$ continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

$x \xmapsto{f_2} -\frac{1}{2} e^{x-2}$ continue sur $\mathbb{R}$

$x \xmapsto{f_3} e^{x-2} - 4$ continue sur $\mathbb{R}$.

D'où $f = f_1 + f_2 \times f_3$ continue sur $\mathbb{R}$

en particulier f continue sur $]2+\ln(3), 2+\ln(4)[$

✓ <u>La monotonie de f :</u>

D'après le TV de f on a $f \downarrow$ sur $\mathbb{R}$

D'où f monotone sur $\mathbb{R}$.

✓ <u>La condition $f(2+\ln(3)) \times f(2+\ln(4)) < 0$:</u>

On a $f(2+\ln(3)) = -2 - \ln(3) + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{2+\ln(3)-2}\left(e^{2+\ln(3)-2} - 4\right)$

$= \frac{1}{2} - \ln(3) - \frac{3}{2}(3-4)$

$= \frac{1}{2} - \ln(3) + \frac{3}{2} = 2 - \ln(3) > 0$.

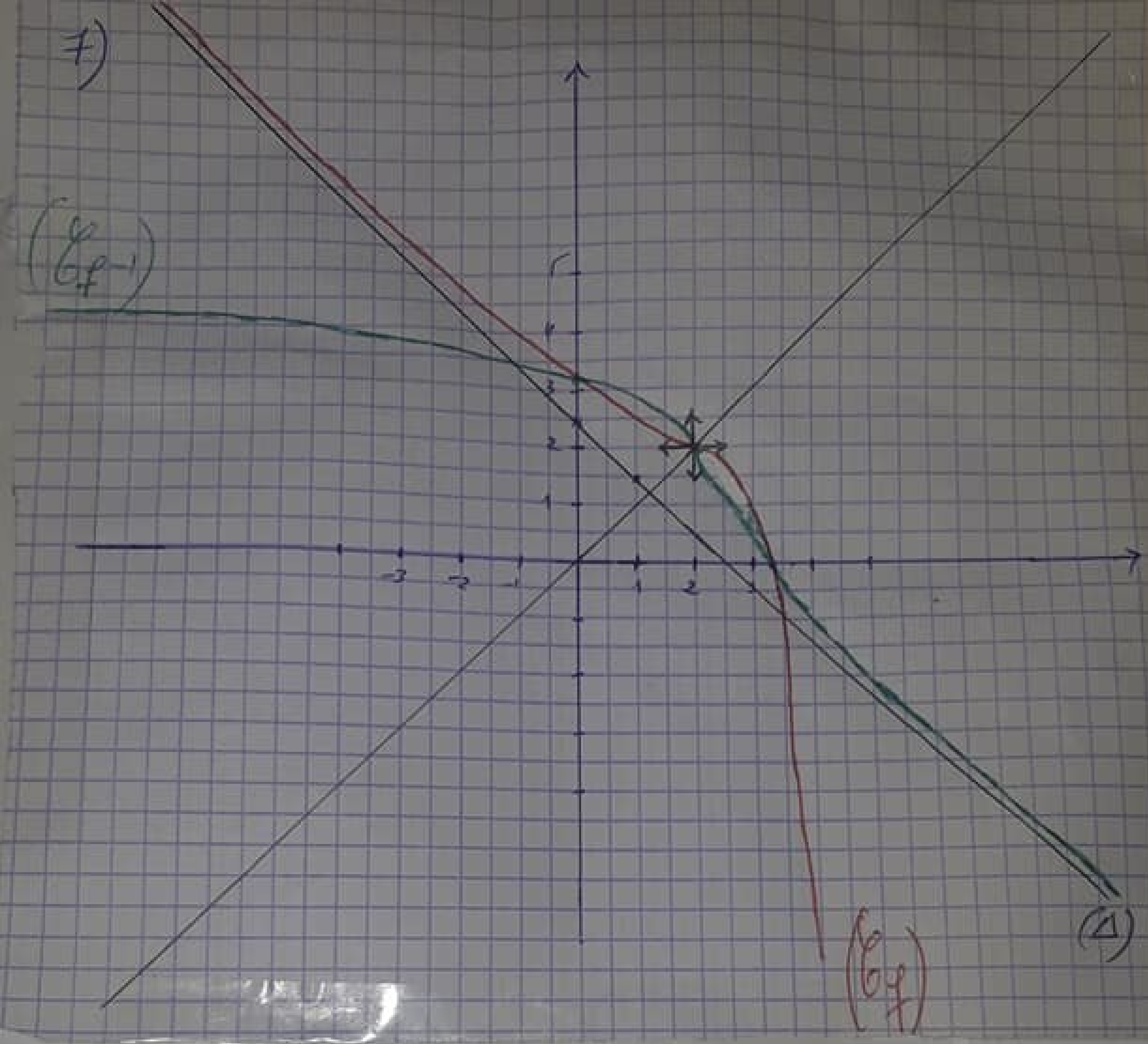
$f(2+\ln(4)) = -2 - \ln(4) + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{2+\ln(4)-2}\left(e^{2+\ln(4)-2} - 4\right)$

$= \frac{1}{2} - 2\ln(2) - \frac{1}{2} \times 4\,(4-4)$

$= \frac{1}{2} - 2\ln(2) < 0$

D'où $f(2+\ln(3)) \times f(2+\ln(4)) < 0$

7)



8) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

On a déjà montré que f continue et monotone sur $\mathbb{R}$ alors f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) Voir la courbe.

c) $(f^{-1})'(2-\ln(3)) = (f^{-1})'(f(2+\ln(3)))$

$$= \frac{1}{f'(2+\ln(3))}$$

$$= \frac{1}{-\left(e^{2+\ln(3)-2}-1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{-(3-1)^2} = \frac{1}{-4}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

Fin

#

Prof : Mohammed Zerrâ

Tel : 06 37 96 96 28

Gmail : mohamed.zerra@gmail.co