التمرين 1:

1- حساب u_1.

لدينا: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_1 = \frac{2u_0}{2u_0+5}$

$$= \frac{2\times 3/2}{2\times 3/2+5}$$

$$= \frac{3}{8}$$

2- لنبين بالترجع أن:

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ ومنه $u_0>0$

(العلاقة صحيحة)

نفترض أن: $u_n>0$ من أجل n من $\mathbb{N}$

ولنبين أن: $u_{n+1}>0$

لدينا: $u_n>0$ ومنه $2u_n>0$

و $2u_n+5>0$ وبالتالي:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}>0$$

إذن حسب مبدأ الترجع:

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

3-أ)- لنبين أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$:

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}$

و $\forall n\in\mathbb{N},\ 2u_n+5>5$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{2u_n+5}<\frac{1}{5}$

وبما أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

فإن: $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{2u_n}{2u_n+5}<\frac{2}{5}u_n$

من جهة ثانية لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}>0$

وبالتالي:

$\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_{n+1}<\frac{2}{5}u_n$

لنستنتج أن:

$\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_{n+1}<\frac{2}{5}u_n$

ومنه:

$$0<u_1<\frac{2}{5}u_0$$

$$\times\quad 0<\cancel{u_2}<\frac{2}{5}\cancel{u_1}$$

$$\times\quad \vdots$$

$$\times\quad 0<u_n<\frac{2}{5}\cancel{u_{n-1}}$$

$$0<u_n<\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\frac{3}{2}$$

ب)- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

لأن: $\lim \left(\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

$\left(-1<\frac{2}{5}<1\ \text{لأن}\right)$

و $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

4)-

4)- لنبين أن (v_n) هندسية:

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3}$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1}+3}$

$$=\frac{4\left(\frac{2u_n}{2u_n+5}\right)}{2\left(\frac{2u_n}{2u_n+5}\right)+3}$$

$$=\frac{\frac{8u_n}{2u_n+5}}{\frac{4u_n+6u_n+15}{2u_n+5}}$$

$$=\frac{8u_n}{10u_n+15}$$

$$=\frac{2}{5}\,\frac{4u_n}{2u_n+3}$$

$$=\frac{2}{5}v_n$$

وبالتالي (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0=1$

ب)- v_n بدلالة n.

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=v_0\times q^n$

أي أن $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=1\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$

u_n بدلالة n:

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3}$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n(2u_n+3)=4u_n$

أي أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ 2u_nv_n+3v_n=4u_n$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n(2v_n-4)=-3v_n$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3v_n}{4-2v_n}$

أي أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4-2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

التمرين الثاني:

$(E): z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$

$$\Delta=\left(-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right)^2-4\times1\times16$$

$$=4\left((\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{6}+6\right)-4\times16$$

$$=-4\left(16-8-2\sqrt{2}\sqrt{6}\right)$$

$$=-4\left(6-2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+2\right)$$

$$=-4\left((\sqrt{6})^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+(\sqrt{2})^2\right)$$

$$=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$$

ب)- استنتاج حلول (E)

$$z_1 = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6}) - i2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{6} - (\sqrt{6}-\sqrt{2})i$$

و $$z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{6} + (\sqrt{6}-\sqrt{2})i$$

2)- أ)- لنتحقق أن: $b\bar{c} = a$

لدينا:

$$b\bar{c} = (1+i\sqrt{3})\left(\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)$$
$$= (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$
$$= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$= a$$

لنستنتج أن: $ac = 4b$

لدينا: $b\bar{c} = a$

ومنه $b\bar{c}\times c = ac$

أي أن: $b\times|c|^2 = ac$

وبما أن: $c = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$

فإن: $|c|^2 = (\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2 = 4$

إذن: $\boxed{ac = 4b}$

ب)- لدينا: $b = 1+i\sqrt{3} \Rightarrow |b| = \sqrt{1^2+3} = 2$

$$b = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$c = \sqrt{2}+i\sqrt{2} \Rightarrow |c| = 2$$

$$c = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$c = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ج)-

$$a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

لدينا:

$$a = b\bar{c}$$
$$= \left[2,\frac{\pi}{3}\right]\times\left[2,-\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= \left[4,\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= \left[4,\frac{\pi}{12}\right]$$

3)- أ)-

لنتحقق أن: $z' = \frac{1}{4}az$

لدينا: $R(M)=M' \Leftrightarrow (z'-0) = e^{i\frac{\pi}{12}}(z-0)$

$$\Leftrightarrow z' = z\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{4}az.$$

ب)- $R(C) = ?$

لدينا:

$$z' = \frac{1}{4}ac$$
$$= \frac{1}{4}\times 4b$$
$$= b$$

ومنه: $R(C)=B$.

ج)- طبيعة المثلث OBC.

لدينا: $R(C)=B$

ومنه $OC=OB$ ومنه المثلث OBC متساوي الساقين في O.

د)- لنبين أن: $a^4 = 128b$

لدينا:
$a = [4, \frac{\pi}{12}]$

و
$b = [2, \frac{\pi}{3}]$

ومنه:
$a^4 = [4^4, 4\times\frac{\pi}{12}]$

$a^4 = [256, \frac{\pi}{3}]$

$a^4 = 128\times[2, \frac{\pi}{3}]$

$a^4 = 128\times b$

← استنتاج أن: النقط D و B و O مستقيمية.

لدينا:
$d = a^4$

و
$a^4 = 128b$

إذن:
$\frac{d}{b} = 128$

أي أن:
$\frac{d-0}{b-0} = 128 \in \mathbb{R}$ ← صفر

ومنه النقط D و B و O مستقيمية

التمرين 3: (4 نقط)

1)-أ- لدينا $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

ومنه
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{2\times 1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

أي:
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

ب)- g ↑ على المجال $[1, +\infty[$.

لدينا:
$\forall x \in [1, +\infty[, \sqrt{x} \geq 1$

ومنه
$\forall x \in [1, +\infty[, \sqrt{x} \geq 1$

إذن:
$\forall x \in [1, +\infty[, \frac{\sqrt{x}-1}{x} \geq 0$

وبالتالي
$\forall x \in [1, +\infty[, g'(x) \geq 0$

إذن الدالة g ↑ على المجال $[1, +\infty[$.

2)- لنستنتج أن:
$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

لدينا
$\forall x \in [1, +\infty[; x \geq 1$

وبما أن g ↑ على $[1, +\infty[$ فإن:
$\forall x \in [1, +\infty[, g(x) \geq g(1) = 0$

أي أن:
$\forall x \in [1, +\infty[; 2\sqrt{x} - 2 - \ln x \geq 0$

وبالتالي:
$\forall x \in [1, +\infty[; 2\sqrt{x} - 2 \geq \ln x$

ومنه:
$\forall x \in [1; +\infty[; 2\sqrt{x} \geq \ln x$

$= \frac{19}{3} - 4\ln 4$.

المسألة:

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

-(1 و

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

لأن:

$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

لأن:

$\lim_{x\to+\infty} -x + \frac{5}{2} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2} = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (e^{x-2} - 4) = +\infty$

-(2 - أ

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

$= 0$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $-\infty$.

ب-

$e^{x-2} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x-2} = 4$

$\Leftrightarrow x - 2 = \ln 4$

$\Leftrightarrow x = (\ln 4) + 2$

لدينا $\forall x \in]-\infty, 2+\ln 4]$

$f(x) - y = -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) \geq 0$

لأن $\forall x \in]-\infty, 2+\ln 4]$

$-\frac{1}{2}e^{x-2} > 0$ و $e^{x-2} - 4 \leq 0$

إذن (Δ) فوق $(\mathcal{C})$ على المجال $]-\infty, 2+\ln 4]$

د) - لنبين أن:

$\forall x \in [1;+\infty[; 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$

لدينا:

$\forall x \in [1;+\infty[; 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

ومنه

$\forall x \in [1;+\infty[; 0 \leq (\ln x)^3 \leq 2^3 (\sqrt{x})^3$

$\forall x \in [1;+\infty[; 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ إذن:

لدينا:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$

إذن:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$

-(2 - أ)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; G'(x) = \left(x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)\right)'$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* , G'(x) = -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + x\left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; G'(x) = -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* , G'(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$
$= g(x)$

ومنه G دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}_+^*$.

ب -

$\int_1^4 g(x)\,dx = \left[G(x)\right]_1^4$

$= \left[x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)\right]_1^4$

$= \left(4\left(-1 + \frac{4}{3}\times 2 - \ln 4\right) - \left(\frac{4}{3} - 1\right)\right)$

$= 4\left(\frac{5}{3} - \ln 4\right) - \frac{1}{3}$

$= \frac{20}{3} - 4\ln 4 - \frac{1}{3}$

و: $\forall x\in[2+\ln4,+\infty[$

$f(x)-y=-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\leq 0$

لأن، $e^{x-2}-4\geq 0$ و $-\frac{1}{2}e^{x-2}>0$

لكل x من $[2+\ln4,+\infty[$.

3)- إذن (Δ) فوق (ℰ) على المجال $[2+\ln4,+\infty[$

لنبين أن، $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)}{x}$

$=\lim_{+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\frac{e^{x-2}}{x}(e^{x-2}-4)$

$=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-2}}{x}=\lim_{+\infty}\frac{e^{x}}{x}\times\frac{1}{e^2}$ لأن

$=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}(e^{x-2}-4)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}=-1$

(ℰ) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب.

4)-أ) $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=$

$f'(x)=\left(-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right)'$

$=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$

$-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2})$

$=-1-(e^{x-2})^2+2e^{x-2}$

$=-(e^{x-2}-1)^2$

ب-

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘

5)- $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=(f'(x))'$

$=\left(-(e^{x-2}-1)^2\right)'$

$=\left(-2(e^{x-2}-1)e^{x-2}\right)$

$=-2e^{x-2}(e^{x-2}-1)$

$f''(x)=0\iff x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
تقعر $(\mathcal{C}_f)$	محدب	$A(2,2)$	مقعر

6)- لدينا f متصلة على $[2+\ln3;2+\ln4]$

و f تناقصية قطعا

و $f(2+\ln3)=-(2+\ln3)+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\times3$

$=2-\ln3>0$

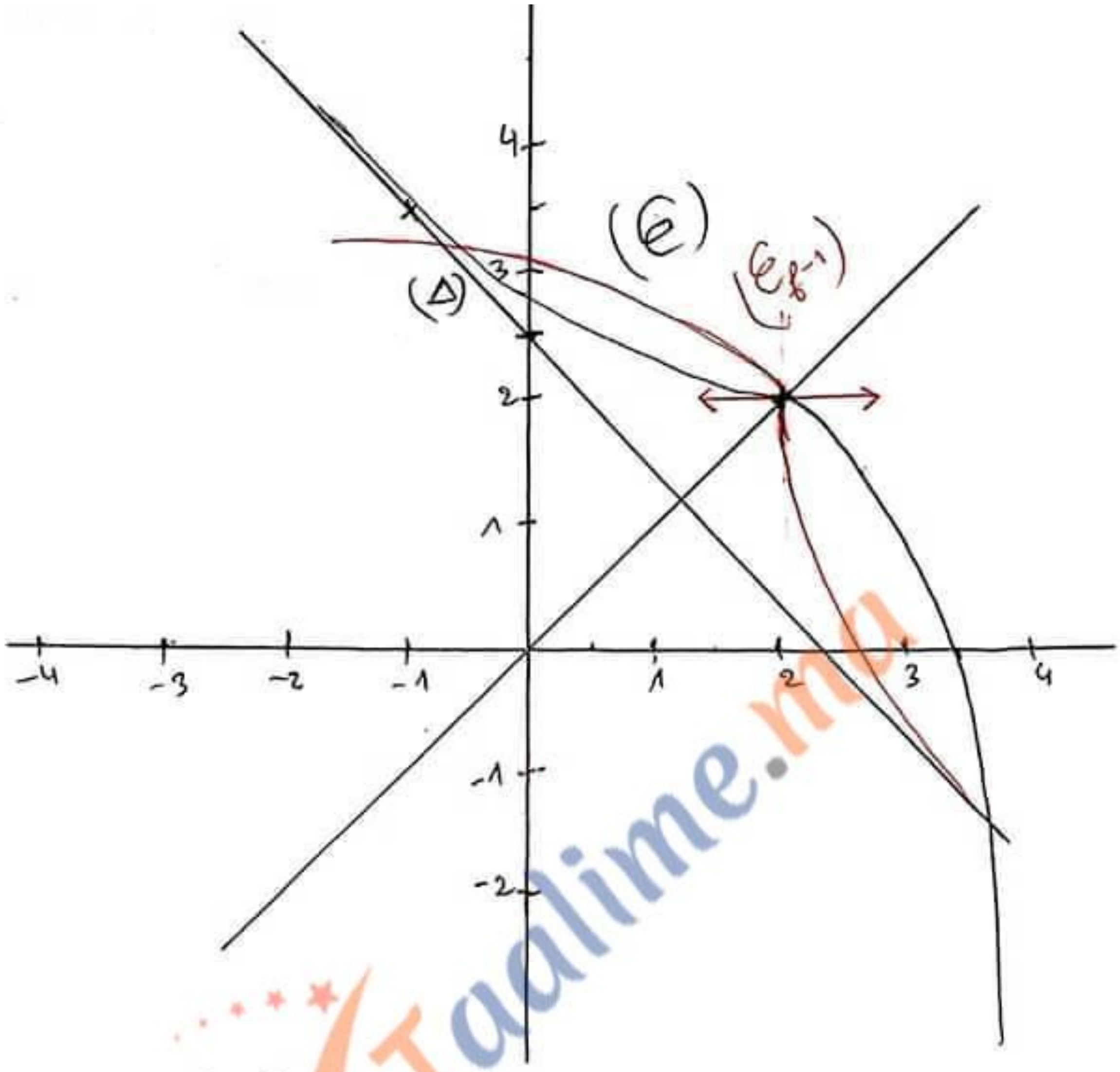
$f(2+\ln4)=-(2+\ln4)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\times0$

$=\left(\frac{1}{2}-\ln4\right)<0$

$f(2+\ln3)\times f(2+\ln4)<0$

ومنه حسب TVI

$\exists!\,\alpha\in[2+\ln3, 2+\ln4]\,/\,f(\alpha)=0$



8) f ـ لدينا f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن فهي تقبل دالة عكسية معرفة على $f(\mathbb{R})$.

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{+\infty} f(x), \lim_{-\infty} f(x)\right[$$
$$=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

2) $(f^{-1})'(2-\ln 3)$

لدينا ، $f'(2+\ln 3) = -(e^{\ln 3}-1)^2$
$$= -4 \neq 0$$

إذن : f^{-1} قابلة للاشتقاق في $2+\ln 3$ ولدينا :

$$(f^{-1})'(2+\ln 3) = \frac{1}{f'(2+\ln 3)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$