حلول تمارين الامتحان الوطني 2010 لمادة الرياضيات شعبة علوم تجريبية بمسالكها والعلوم والتكنولوجيات بمسلكيها

حل التمرين 1

1- **لنبين أن** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$

لدينا $\overrightarrow{AB}(4;0;-3)$ و $\overrightarrow{AC}(8;1;-6)$ إذن

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(0\times(-6)+3\times1)\vec{i}-(4\times(-6)+3\times8)\vec{j}+(4\times1-0\times8)\vec{k}$ أي

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}-0\vec{j}+4\vec{k}$ أي $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$

2- **استنتاج**

لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

إذن المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) هي $3x+4z+d=0$ وبما أن

$B(3;0;0)$ نقطة من (ABC) فإن $9+d=0$ أي $d=-9$ ومنه المعادلة

الديكارتية للمستوى (ABC) هي $3x+4z-9=0$

3- **لنبين أن** $\Omega(3;1;0)$ مركز الفلكة (S) وشعاعها $R=5$

$M(x;y;z)\in(S):x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

لدينا $M(x;y;z)\in(S):x^2-6x+9+y^2-2y+1+z^2=25$

$M(x;y;z)\in(S):(x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=5^2$

ومنه (S) فلكة مركزها $\Omega(3;1;0)$ وشعاعها $R=5$

4- **لنحدد تمثيلا برامتريا للمستقيم** (Δ)

لدينا $(\Delta)\perp(ABC)$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى

(ABC) إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) وحيث (Δ)

يمر من النقطة $\Omega(3;1;0)$ إذن التمثيل البرامتري للمستقيم (Δ)

هو $(\Delta):\begin{cases}x=3+3t\\y=1\\z=4t\end{cases}\quad(t\in IR)$

5- **لنبين أن** (Δ) **يقطع الفلكة** (S) **في** $E(6;1;4)$ و $F(0;1;-4)$

6 ـ لتحديد إحداثيات كل من E و F يكفي أن نحل النظمة التالية

$$(t \in IR) \qquad \begin{cases} (S): x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0 \\ x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases}$$ ومنه

$$\begin{cases} (3+3t)^2+1^2+(4t)^2-6(3+3t)-2\times 1-15=0 \\ x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases}$$ إذن

$$\begin{cases} 25t^2=25 \\ x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases}$$ إذن $$\begin{cases} t=1 \text{ و } t=-1 \\ x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases}$$ ومنه فإن $$\begin{cases} t=1 \\ x=6 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$ أو $$\begin{cases} t=-1 \\ x=0 \\ y=1 \\ z=-4 \end{cases}$$ وبالتالي فإن

(Δ) يقطع الفلكة (S) في $E(6;1;4)$ و $F(0;1;-4)$.

حل التمرين2

1 ـ <u>لنحل في</u> $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+10=0$

لدينا $\Delta=36-40=-4=(2i)^2$ ومنه فإن $z_1=\dfrac{6+2i}{2}=3+i$

و $z_2=\dfrac{6-2i}{2}=3-i$ إذن $S=\{3+i;3-i\}$

2 ـ <u>لنبين أن</u> $z'=iz+2-4i$

لدينا الصيغة العقدية الأسية للدوران R مركزه $A(3-i)$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ هي

$z'-(3-i)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-3+i)$ بحيث $R(M)=M'$ مع $M(z)$ و $M'(z')$ إذن

$z'=iz-3i-1+3-i$ لأن $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=0+i=i$ وبالتالي فإن

$z'=iz+2-4i$

3 ـ <u>لنتحقق أن</u> $c'=5+3i$

لدينا $R(C)=C'$ و $C(c)$ و $C'(c')$ مع $c=7-3i$ إذن $c'=ic+2-4i$ حسب

ماسبق ومنه فإن $c'=i(7-3i)+2-4i$ أي $c'=5+3i$

4 -لنبين أن $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$

$\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ إذن $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i}=\frac{2+2i}{4-4i}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=\frac{1}{2}\frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}}=\frac{1}{2}i$

5 -استنتاج

بما أن $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ فإن $\begin{cases}\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]\\ \frac{BC'}{BC}=\frac{1}{2}\end{cases}$ أي

$\begin{cases}\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]\\ BC=2BC'\end{cases}$ لأن $i=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$ ومنه فإن المثلث BCC' قائم الزاوية في B.

حل التمرين3

1 -لنبين أن $p(A)=\frac{1}{2}$

لينا A الحدث: (الحصول على كرة حمراء واحدة فقط) إذن

$p(A)=\frac{C_3^1\times C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{\cancel{3\times7\times5}}{2\times5\times\cancel{3\times7}}=\frac{1}{2}$ أي $p(A)=\frac{1}{2}$

2 -لنبين أن $p(B)=\frac{41}{42}$

لدينا الحدث B (الحصول على كرة بيضاء على الأقل) إذن الحدث المضاد $\overline{B}$ هو عدم الحصول على أية كرة بيضاء ومنه

$p(\overline{B})=\frac{C_5^1}{C_{10}^4}=\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\times2\times3\times7}=\frac{1}{42}$ ونعلم أن $p(B)+p(\overline{B})=1$ إذن

$p(B)=1-\frac{1}{42}$ أي $p(B)=\frac{41}{42}$

3 -لنتحقق من أن $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

لدينا المتغير العشوائي X يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة.

ومنه فإن :

- المتغير العشوائي X يربط كل سحبة لاتحتوي على أية كرة حمراء بالعدد0
- المتغير العشوائي Xيربط كل سحبة تحتوي على كرة حمراء واحدة بالعدد1

- المتغير العشوائي X يربط كل سحبة تحتوي على كرتين حمراويتين بالعدد2
- المتغير العشوائي X يربط كل سحبة تحتوي على ثلاث كرات حمراء بالعدد3

4 - **لنبين أن** $p(X=0)=\frac{1}{6}$ و $p(X=2)=\frac{3}{10}$

لدينا $p(X=0)=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}$ و $p(X=2)=\frac{C_3^2\times C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{10}$

5 - **لنحدد قانون احتمال** X

لدينا $p(X=1)=p(A)=\frac{1}{2}$ ونعلم أن

$p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=1$ إذن $p(X=3)=\frac{1}{30}$

وبالتالي فإن قانون احتمال X هو :

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

حل التمرين4

1 - **لنبين بالترجع أن** $\forall n\in IN: u_n-1\succ 0$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0-1\succ 0$ لأن $u_0=2$.

نفترض أن لكل $n\in IN$ لدينا $u_n-1\succ 0$ ونبرهن أن $u_{n+1}-1\succ 0$.

لدينا $u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{3u_n-1-2u_n}{2u_n}=\frac{u_n-1}{2u_n}$ وحيث

$u_n-1\succ 0$ حسب الافتراض إذن $\frac{u_n-1}{2u_n}\succ 0$ ومنه فإن $u_{n+1}-1\succ 0$

وبالتالي فإن $\forall n\in IN: u_n-1\succ 0$

2 - **لنبين أن المتتالية** (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

لدينا $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}=\frac{u_n-1}{4u_n-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{2u_n-1}\right)=\frac{1}{2}v_n$ ومنه فإن (v_n)

هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

3 -استنتاج

لدينا (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \frac{1}{3}$ لأن $u_0 = 2$

إذن $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4 -لنبين أن $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

لدينا

$$v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \Rightarrow v_n(2u_n - 1) = u_n - 1 \Rightarrow u_n(2v_n - 1) = v_n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

ومنه فإن $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

5 -استنتاج

لدينا $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ كون $0 \prec \frac{1}{2} \prec 1$

ومنه فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

6 -لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} w_n$

لدينا $w_n = \ln(u_n)$ والدالة $x \mapsto \ln(x)$ متصلة على $]0;+\infty[$ إذن $D_f =]0;+\infty[$

$$\begin{cases} w_n = \ln(u_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$$

حل التمرين5

الجزء الأول

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

1 -لنبين أن $\forall x \in IR : g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$

لدينا $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$ إذن

$g'(x) = (1 + 4xe^{2x})' = 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 4e^{2x}(1 + 2x)$ ومنه فإن

$$\forall x \in IR : g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$$

2 - **لنبين أن** g تزايدية على $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ و g تناقصية على $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$

لدينا $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$ لأن

$\forall x \in IR : e^{2x} \succ 0$ ومنه فإن :

- إداكان $x\geq\frac{-1}{2}$ فإن $2x+1\geq 0$ إذن $g'(x)\geq 0$ووبالتالي فإن g تزايدية على $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$
- داكان $x\leq\frac{-1}{2}$ فإن $2x+1\leq 0$ إذن $g'(x)\leq 0$ وبالتالي فإن g تناقصية على $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$

3- <u>لنبين أن</u> $g\left(\frac{-1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$ ونتأكد من آن $g\left(\frac{-1}{2}\right)\succ 0$

لدينا $g\left(\frac{-1}{2}\right)=1+4\left(\frac{-1}{2}\right)e^{2\times\left(\frac{-1}{2}\right)}=1-2e^{-1}=1-\frac{2}{e}$ إذن $g\left(\frac{-1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$

بما أن $e\approx 2{,}7$ فإن $e\succ 2$ إذن $\frac{2}{e}\prec 1$ إذن $1-\frac{2}{e}\succ 0$أي $g\left(\frac{-1}{2}\right)\succ 0$

4- <u>استنتاج</u>

لدينا g تزايدية على $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ و g تناقصية على $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$ إذن g تقبل قيمة دنيا $g\left(\frac{-1}{2}\right)$ عند $x=\frac{-1}{2}$ ومنه فإن $g(x)\succ g\left(\frac{-1}{2}\right)$ وحيث $g\left(\frac{-1}{2}\right)\succ 0$

إذن $\forall x\in IR: g(x)\succ 0$.

الجزء الثاني

$$f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$$

1- <u>لنحسب</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2- <u>لنبين أن</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لدينا $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$ إذن $f(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+x+1$ وبما أن

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to-\infty}2xe^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\end{cases}$$

فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

3- <u>لنبين أن</u> $\forall x\in IR: f'(x)=g(x)$

لدينا $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$ إذن

ومنه $f'(x)=\cancel{2e^{2x}}+4xe^{2x}-\cancel{2e^{2x}}+1=1+4xe^{2x}=g(x)$

فإن $\forall x\in IR: f'(x)=g(x)$

4 -استنتاج

لدينا $\forall x\in IR: f'(x)=g(x)$ وحيث $\forall x\in IR: g(x)\succ 0$ حسب ماسبق

إذن $\forall x\in IR: f'(x)\succ 0$ ومنه فإن f تزايدية على IR.

5 -لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

لدينا $\frac{f(x)}{x}=\frac{(2x-1)e^{2x}+x+1}{x}=\left(\frac{2x-1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$ ومنه فإن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

6 -استنتاج

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ فإن المنحنى (C_f) للدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

7 -لنحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))$

لدينا $f(x)-(x+1)=(2x-1)e^{2x}=2xe^{2x}-e^{2x}$ وبما أن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0\end{cases}$ فإن

$$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$$

8 -استنتاج

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ فإن المستقيم $(\Delta): y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

9 -لنحدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

لتكن $E(x;y)$ نقطة تقاطع (Δ) و (C_f) إذن $E\in(\Delta)$ و $E\in(C_f)$

لدينا $x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (2x-1)=0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{2x}=0 \Leftrightarrow f(x)=y$ لأن

$e^{2x}\succ 0$ ، $(e^{2x}\neq 0)$ ومنه $y=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ لأن $E\in(\Delta)$ وبالتالي فإن

$E\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

10 - <u>لندرس الوضع النسبي للمستقيم</u>(Δ) والمنحنى(C_f)

لدينا $f(x)-y=(2x-1)e^{2x}$ و $\forall x\in IR: e^{2x}\succ 0$ إدن إشارة $(f(x)-y)$ هي إشارة الحدانية $(2x-1)$.

- إداكان $2x-1\succ 0$ فإن $x\succ\frac{1}{2}$ ومنه فإن $(f(x)-y)\succ 0$ وبالتالي فإن المنحنى (C_f) يوجد فوق المستقيم (Δ).
- إداكان $2x-1\prec 0$ فإن $x\prec\frac{1}{2}$ ومنه فإن $(f(x)-y)\prec 0$ وبالتالي فغن المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ).

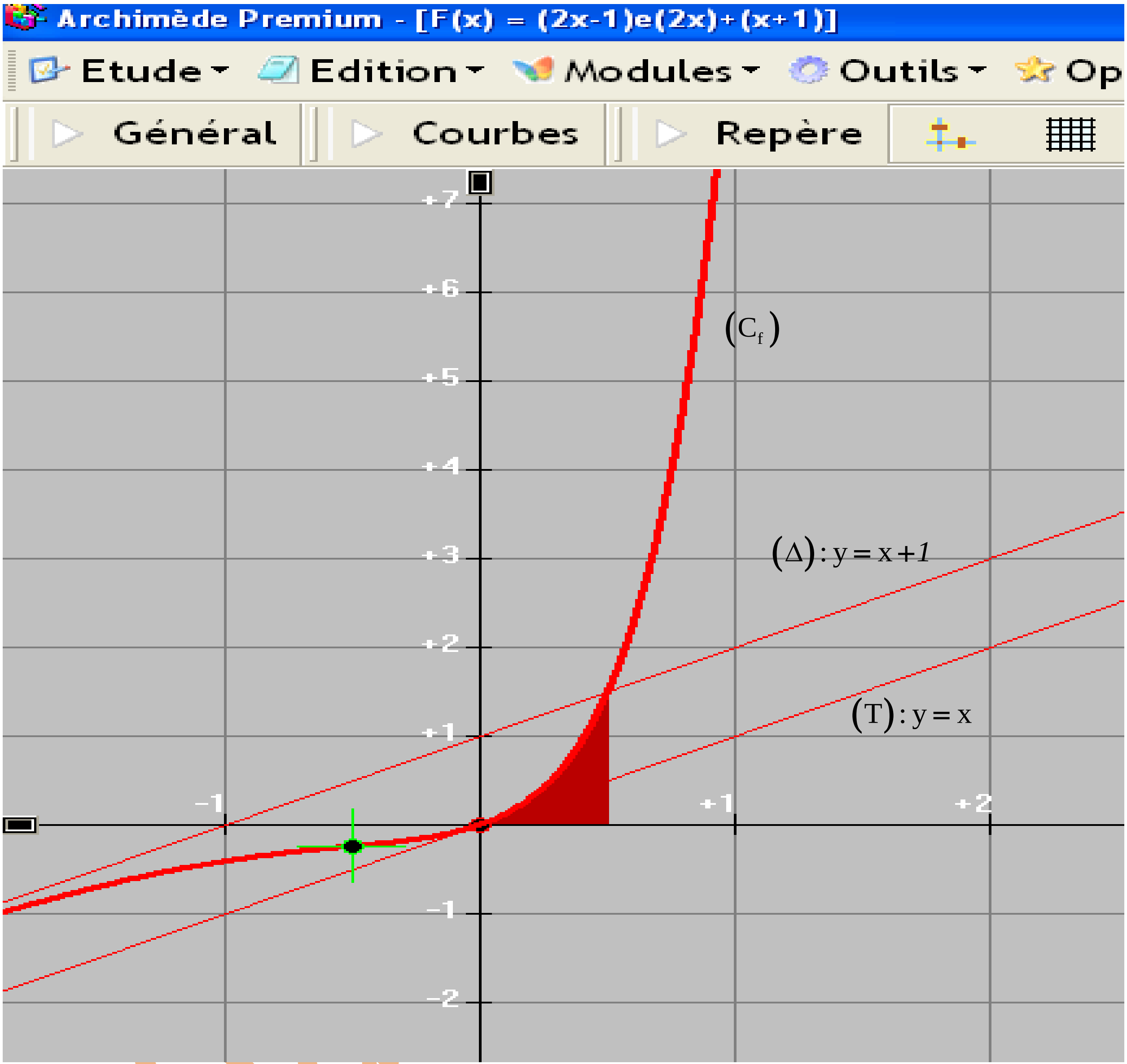
11 - <u>لنبين أن</u> $(T): y=x$ مماس ل (C_f) في 0.

لدينا $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و $f'(0)=1$ و $f(0)=0$ إدن $y=x$ هي معادلة (T) للمنحنى (C_f) في 0.

12 - <u>لنبين أن</u> للمنحنى (C_f) **نقطة انعطاف أفصولها** $\frac{-1}{2}$

لدينا $f'(x)=g(x)\Rightarrow f''(x)=g'(x)\Rightarrow f''(x)=4(2x+1)e^{2x}$ ومنه فإن $f''(x)=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$ وبالتالي فإن المنحنى (C_f) له نقطة انعطاف أفصولها $\frac{-1}{2}$.

13 - <u>إنشاء المنحنى</u> (C_f) و (T).



14 - <u>لنبين أن</u> $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$ باستعمال مكاملة بالأجزاء.

نضع $\begin{cases} u'(x)=e^{2x} \\ v(x)=2x-1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \\ v'(x)=2 \end{cases}$ ومنه فإن

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}dx=\frac{1}{2}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{e}{2}$$ وبالتالي

فإن $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$

15 - <u>**لنبين أن**</u> $A(\Delta)=(6-2e)cm^2$

لدينا $A(\Delta)$ هي مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f)

والمستقيم $(T):y=x$ المماس ل (C_f) في 0 والمستقيمين $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$

إذن $A(\Delta)=\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-x)dx\times 4cm^2=4\left(1-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\right)cm^2=(6-2e)cm^2$

وبالتالي فإن $A(\Delta)=(6-2e)cm^2$