


| | | | |
|-----------------------|---|--|---|
| المادة : الرياضيات | تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا | المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والبحث العلمي إدارة التربية الوطنية |  |
| مدة الانجاز : 3 ساعات | الدورة العادية 2007 | | |
| المعامل : 7 | شعبة العلوم التجريبية | | |

التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء \mathcal{E} المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0 \text{ الفلكة}$$

$$(P) : x - y + 2z + 1 = 0 \text{ والمستوى}$$

1. بما أن :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + z^2 - 6z + 9 - 9 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{6}^2$$

فإن : (S) فلكة مركزها $\Omega(1,2,3)$ وشعاعها $R = \sqrt{6}$.

$$2. \text{ لدينا : } d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+(2 \times 3)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = R$$

3. أ- لدينا (Δ) هو المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (P) ولدينا $\vec{n}(1,-1,2)$ متجهة

منظمة على المستوى (P) فهي موجهة للمستقيم (Δ) ، ومنه نستنتج تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ)

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases} / t \in \mathbb{R} \quad \text{كما يلي :}$$

ب- لتكن $\omega(x, y, z)$ نقطة تماس كل من (S) و (P) : لدينا $\omega \in (S)$ و $\omega \in (P)$. إذن :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases} / t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad x - y + 2z + 1 = 0 \quad \text{، ومنه فإن :}$$

$$1+t - (2-t) + 2(3+2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t = -1}$$

$$\text{وعليه فإن : } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \text{ ، وبالتالي فإن : } \omega(0,3,1)$$

التمرين الثاني :

$$1. \text{ أ- لدينا : } (3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = \boxed{5-12i}$$

ب- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $(E) : z^2 - 2(4+i)z + 10 + 20i = 0$

المميز المختصر المعادلة (E) هو :

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-(4+i))^2 - 1 \times (10 + 20i) = 16 + 8i - 1 - 10 - 20i = 5 - 12i = (3-2i)^2$$

$$z_2 = \frac{4+i-3+2i}{1} = 1+3i \text{ و } z_1 = \frac{4+i+3-2i}{1} = 7-i \text{ : حلين هما (E) إذن للمعادلة}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{1+3i, 7-i\}$.

2. في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر (O, \bar{u}, \bar{v}) ، نعتبر النقط A و B

و C التي الحاقها على التوالي هي : $a = 1+3i$ و $b = 7-i$ و $c = 5+9i$.

$$\text{أ- لدينا : } \frac{c-a}{b-a} = \frac{(5+9i)-(1+3i)}{(7-i)-(1+3i)} = \frac{5+9i-1-3i}{7-i-1-3i} = \frac{4+6i}{6-4i} = \frac{i(6-4i)}{6-4i} = i$$

ب- لدينا : $\frac{c-a}{b-a} = i$. إذن : $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = |i| = 1$ و منه فإن : $AB = AC$.

ولدينا :

$$\overline{(AB, AC)} \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg(i) [2\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

لأن $i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$. وبالتالي فإن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A.

التمرين الثالث :

1. ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ، لدينا :

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\text{2. لدينا : } \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left(x-1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right]_0^2 = \ln 3$$

$$\text{3. نضع : } \left. \begin{array}{l} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1} \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x+1) \end{array} \right\}$$

لدينا : u و v متصلتين وقابلتين للاشتقاق على المجال [0, 2] ولدينا : u' و v' متصلتين على المجال]0, 2[. حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$\int_0^2 x \ln(x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1)\right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = 2 \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{3}{2} \ln 3$$

التمرين الرابع :

يحتوي كيس على سبع بيدقات (لا يمكن التمييز بينها باللمس) تحمل الأعداد :

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس ، نعتبر الأحداث التالية :

A : لا توجد أية بيدقة تحمل العدد 0 من بين البيدقات الثلاثة المسحوبة <<

B : سحب ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى <<

C : مجموع الأعداد المسجلة على البيدقات الثلاثة المسحوبة منعدم <<

احتمالات الأحداث A و B و C هي :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

$$p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_1^1 \times C_3^1}{C_7^3} = \frac{9}{35}$$

$$p(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_3^3 + (C_3^1 \times C_1^1 \times C_3^1)}{C_7^3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} : A \\ & 1 & -1 & 0 : B \\ 0 & 0 & 0 \text{ أو } & 1 & -1 & 0 : C \end{array}$$

مسألة :

1. نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x) = e^{-x} + x - 1$: $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $g'(x) = (e^{-x} + x - 1)' = -e^{-x} + 1$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow -e^{-x} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-x} = 1 \\ &\Leftrightarrow -x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 & x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \\ \Rightarrow e^{-x} \geq 1 & \Rightarrow e^{-x} \leq 1 \\ \Rightarrow -e^{-x} + 1 \leq 0 & \Rightarrow -e^{-x} + 1 \geq 0 \\ \Rightarrow g'(x) \leq 0 & \Rightarrow g'(x) \geq 0 \end{array}$$

إذن : g تزايدية على المجال $[0, +\infty[$ و تناقصية على المجال $] -\infty, 0]$.

2. لدينا : $g(0) = e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$. ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا g تزايدية على المجال $[0, +\infty[$ و تناقصية

على المجال $] -\infty, 0]$. إذن :

$$\begin{array}{ll} x \leq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0) & x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0) \\ \Rightarrow g(x) \geq 0 & \Rightarrow g(x) \geq 0 \end{array}$$

ومنه نستنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0$ أي : $\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} + x - 1 \geq 0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} + x \geq 1}$

II. لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$.

وليكن (\mathcal{D}) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $x + e^{-x} \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}$ ، وبما أن $e^{-x} + x \geq 1$: $\forall x \in \mathbb{R}$ ، فإن :

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$: إذن . $\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} + x \neq 0$

2. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا : $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}} = \frac{x}{e^{-x}(xe^x + 1)} = \frac{x}{xe^x + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$.

ب- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = \boxed{0}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = \boxed{1}$

نستنتج مما سبق أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مقاربا أفقيا ، بجوار $-\infty$ ، معادلته $y = 0$ ؛ ويقبل مقاربا أفقيا ،

بجوار $+\infty$ ، معادلته $y = 1$.

3. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x+e^{-x}} \right)' \\ &= \frac{x'(x+e^{-x}) - x(x+e^{-x})'}{(x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{x+e^{-x} - x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{x+e^{-x} - x + xe^{-x}}{(x+e^{-x})^2} \\ f'(x) &= \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2} \end{aligned}$$

ب- إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R} هي إشارة $(x+1)$ ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} كما يلي:

| | | | |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | $\frac{1}{1-e}$ | 1 |

$$f(-1) = \frac{-1}{-1+e} = \frac{1}{1-e}$$

4. أ- معادلة المماس (Δ) للمنحنى (\mathcal{C}) في النقطة 0 هي : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

أي : $\boxed{(\Delta) : y = x}$.

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $g(x) = e^{-x} + x - 1$ ، إذن : $g(x) + 1 = e^{-x} + x$ ، ومنه فإن :

$$x - f(x) = x - \frac{x}{x+e^{-x}} = x \left(1 - \frac{1}{x+e^{-x}} \right) = \frac{x(x+e^{-x}-1)}{x+e^{-x}} = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

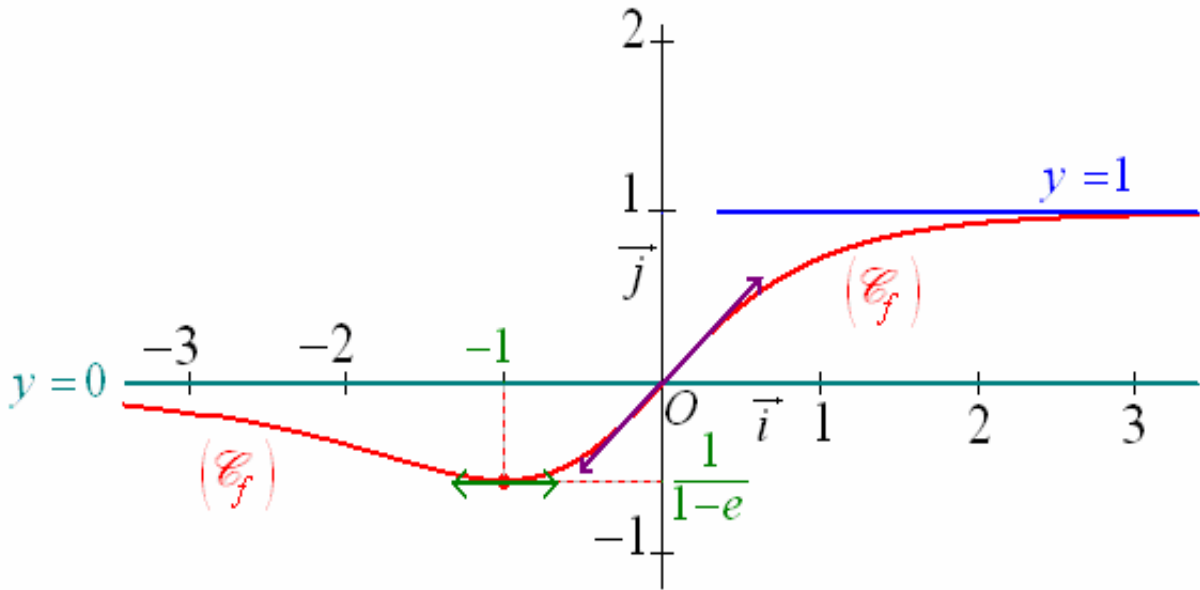
إذن : إشارة $x - f(x)$ على \mathbb{R} هي إشارة x .

| | | | |
|------------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $x - f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

ج- حسب السؤال السابق ، لدينا :

- ✓ (E) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $[0, +\infty[$.
- ✓ (E) يوجد فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty, 0]$.

5. إنشاء المنحنى (E) والمستقيم (Δ) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) :



III. لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 1$ ، إذن : $0 \leq u_0 \leq 1$.
ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نفترض أن $0 \leq u_n \leq 1$ ونبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
لدينا $0 \leq u_n \leq 1$ و f تزايدية على المجال $[0, 1]$ ، إذن $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ وبما أن (E) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $[0, 1]$ ، فإن $0 \leq u_{n+1} \leq f(1) \leq 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1}$$

وبالتالي فإن :

2. حسب السؤال II.4.ب ، لدينا : $\forall x \in [0, 1] : x - f(x) \geq 0$. إذن : $\forall x \in [0, 1] : f(x) \leq x$.
وبما أن : $0 \leq u_n \leq 1$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$ ، فإن : $f(u_n) \leq u_n$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n}$$

ومنه فإن :

وبالتالي فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3. بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغرة بالعدد 0 فإنها متقاربة . لتكن l نهايتها.

لدينا :

✓ f دالة متصلة على المجال $[0,1]$.

✓ $0 \leq f(x) \leq x \leq 1$: $\forall x \in [0,1]$. إذن : $f([0,1]) \subset [0,1]$.

✓ $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in [0,1]$.

✓ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة نهايتها l .

إذن : $f(l) = l$ و $l \in [0,1]$.

حسب السؤال II.4.ب ، لدينا : $\begin{cases} x - f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ x - f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \\ x - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$. إذن : $l = 0$.

$$\cdot \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

وبالتالي فإن :