Correction d'examen BAC 2sm 2022 1 s

Ex1

A-1- On a :

$$1-x+x^2-\frac{1}{x+1}=\frac{1-x^2+x^3+x^2-1}{x+1}$$

$$=\frac{x^3}{x+1}.$$

puisque $x\geq 0$ alors $x+1\geq 1$

donc $\frac{1}{x+1}\leq 1$

$$\Rightarrow 0\leq\frac{x^3}{x+1}\leq x^3$$

c/c $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$ $0\leq 1-x+x^2-\frac{1}{x+1}\leq x^3$

2- On a $(\forall t\geq 0)$ $0\leq 1-t+t^2-\frac{1}{1+t}\leq t^3$

$$\Rightarrow(\forall x\geq 0)\ 0\leq\int_0^x 1-t+t^2-\frac{1}{1+t}\,dt\leq\int_0^x t^3\,dt$$

$$\Rightarrow 0\leq\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ln(1+t)\right]_0^x\leq\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)\leq\frac{x^4}{4}$$

B-1-a- Montrons que f est continue à droite en 0

On a :

$(\forall x>0)$: $0\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)\leq\frac{x^4}{4}$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\leq x-\ln(1+x)\leq\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}\quad\forall x>0$$

et on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}-\frac{x}{3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}=\frac{1}{2}$

alors $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\frac{1}{2}=f(0)$

donc f est continue à droite en 0

b- On a $(\forall x>0)$ $\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}$

$$\Rightarrow(\forall x>0)\ -\frac{x}{3}\leq f(x)-f(0)\leq-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}$$

$$\Rightarrow\forall x>0\ -\frac{1}{3}\leq\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leq-\frac{1}{3}+\frac{x}{4}.$$

et $\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1}{3}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1}{3}+\frac{x}{4}=-\frac{1}{3}$

alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{3}$

et par suite f est dérivable à droite en 0

et on a $f'_d(0)=-\frac{1}{3}$.

2- On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{1+x}\times\frac{1+x}{x^2}$$

$$=0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ $\quad t=1+x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

c/c $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et par suite l'axe des abscisses est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2-a-

On a $(\forall x>0)$ $f'(x) = \dfrac{\left(1-\frac{1}{1+x}\right)x^2 - 2x\left(x-\ln(1+x)\right)}{x^4}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{x - \frac{x}{x+1} - 2x + 2\ln(1+x)}{x^3}$

$= -\dfrac{x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)}{x^3}$

d'où $(\forall x>0)$ $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^3}$.

b- Montrons que : $(\forall x\in I)$ $0 \leq g'(x) \leq x^2$

On a $(\forall x\in I)$ $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{1+x}$

$= \dfrac{(x+1)^2 + 1 - 2(x+1)}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

donc $(\forall x\in I)$ $0 \leq g'(x) \leq x^2$

Car $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 \geq 0$ et $(x+1)^2 \geq 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(x+1)^2} \leq 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{(x+1)^2} \leq x^2$

c- Montrons que $(\forall x\in I)$ $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^3}{3}$

On a $(\forall t\geq 0)$, $0 \leq g'(t) \leq t^2$

$(\forall x\geq 0)$ $\Rightarrow 0 \leq \int_0^x g'(t)\,dt \leq \int_0^x t^2\,dt$

donc $(\forall x\geq 0)$ $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^3}{3}$.

d- On a $(\forall x\in]0,+\infty[)$ $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^3}$

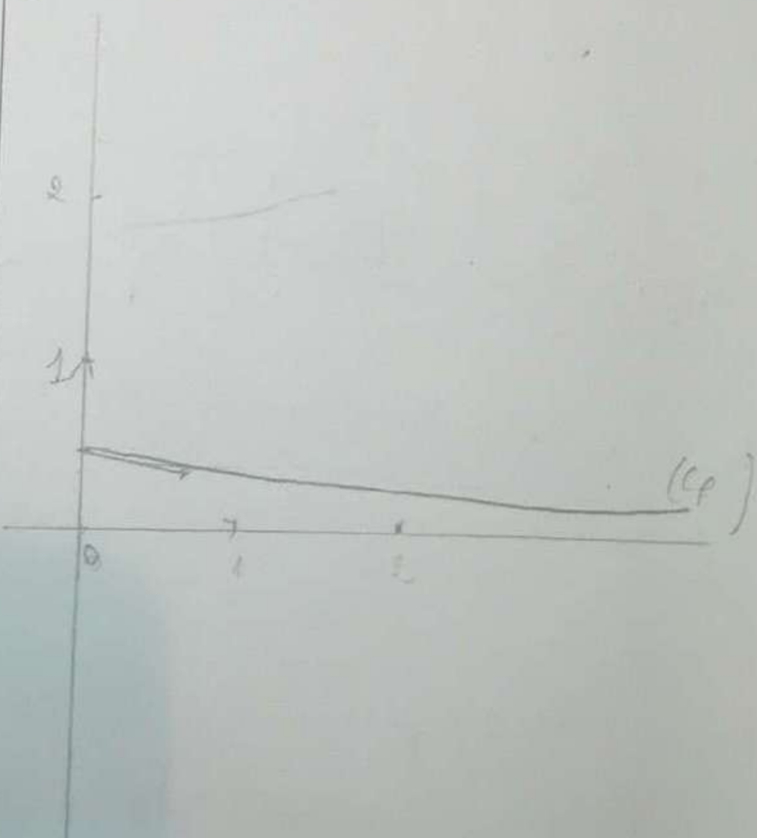
donc $(\forall x\in]0,+\infty[)$ $f'(x) \leq 0$ car $g(x) \geq 0$ et $x^3 > 0$

donc f est strictement décroissante sur I

3-a- Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	0

b-



C-1

Montrons $\exists! \alpha \in]0,1[\quad f(\alpha)=\alpha$

posons $h(x) = f(x) - x$

on a h est continue sur $]0,1[$ car : f est continue sur $]0,1[$ ($x \to x$, $x \to \ln(1+x)$ est continue sur $]0,1[$) et $x \to x^2$ est continue sur $]0,1[$ et ne s'annulle pas

et $\forall x \in]0,1[: h'(x) = f'(x) - 1 < 0$

car $f'(x) \leq 0$

donc h est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$

alors h est une bijection de $]0,1[$ vers $h(]0,1[) =]\lim\limits_{x\to 1^-} h(x), \lim\limits_{x \to 0^+} h(x)[$

$\Rightarrow h(]0,1[) =]-\ln 2, \frac{1}{\alpha}[$

et puisque $0 \in h(]0,1[)$ alors

$\exists! \alpha \in]0,1[$ tq $h(\alpha) = 0$

c/c $\exists! \alpha \in]0,1[\quad f(\alpha) = \alpha$

2- a- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; 0 \leq u_n \leq 1$

pour $n=0$ on a : $0 \leq u_0 \leq 1$ v ($u_0 = \frac{1}{2}$)

supp $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

on a $0 \leq u_n \leq 1$ et f est $\searrow$ alors $f(1) \leq f(u_n) \leq f(0)$

donc $1 - \ln(2) \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$ car $1 - \ln(2) = \ln\left(\frac{e}{2}\right) \geq 0$

donc d'après le P.R on a

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in [0,1]$

b- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$

posons $a = \inf(u_n, \alpha)$ et $b = \sup(u_n, \alpha)$

On a f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors d'après TAF

$\exists c \in]a,b[$ tq $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

$\Rightarrow |f(b) - f(a)| = |b-a| \, |f'(c)|$

$\Rightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| = |u_n - \alpha| \, |f'(c)|$

$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| = |u_n - \alpha| \times |f'(c)|$

$(f(\alpha) = \alpha)$. $f(u_n) = u_{n+1}$

on a déjà vu $\forall x \in]0,1[: f'(c) = -\frac{g(c)}{c^3}$

$\Leftrightarrow \quad |f'(c)| = \frac{g(c)}{c^3}$, car $g(c) \geq 0$

et comme $0 \leq g(c) \leq \frac{c^3}{3}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{g(c)}{c^3} \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow |f'(c)| \leq 1/3$

donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$

c- Montrons par récurrence que :

$(\forall n\in\mathbb{N}) : |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

pour $n=0$ $|u_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$ ✓

car $u_0-\alpha = \frac{1}{3}-\alpha$

$0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}-\alpha \leq \frac{1}{3} \leq 1$

donc $|u_0-\alpha| \leq 1$.

supp que $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

et montrons que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

On a : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n-\alpha|$

$\Rightarrow |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

donc $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

donc d'après le P.R on a :

$(\forall n\in\mathbb{N})$ $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d- on a $(\forall n\in\mathbb{N})$ $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

D.

1- on a $(\forall x\in I)$ $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

on F est dérivable sur I car ~~f~~ $\int_1^x$ la fonction primitive de f sur I qui s'annulle en 1 elle est dérivable sur I

2-a-

posons $u(t) = t-\ln(1+t) \longrightarrow u'(t) = 1-\frac{1}{1+t}$

$= \frac{t}{1+t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2} \longrightarrow v(t) = -\frac{1}{t}$

donc $F(x) = \left[\frac{\ln(1+t)-t}{t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{1}{1+t}\,dt$

$= \ln(2)-1-\frac{\ln(1+x)-x}{x} - \left[\ln(1+t)\right]_x^1$

$= \ln(2)-1-\frac{\ln(1+x)}{x}+1+\ln(2)-\ln(1+x)$

$= 2\ln(2)-\ln(1+x)\left(\frac{1}{x}+1\right)$

$\%$ $(\forall x\in]0;+\infty[)$ $F(x) = 2\ln(2)-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$

b- On a $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to0^+} 2\ln(2)-(1+x)\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}$

$= 2\ln(2)-1$

car $\lim\limits_{x\to0^+} 1+x = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

on a $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = F(0)$ car F est continue à droite en 0 car F est dérivable sur $[0,+\infty[$

$\Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = 2\ln 2-1$.

c- On a $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx \;\|\vec{i}\|^2$

donc $\mathcal{A} = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \times 4\ cm^2$

$\Rightarrow \mathcal{A} = (2\ln 2 - 1) \times 4\ cm^2$.

E-

1-a- on a $k \leq t \leq k+1$ et $f \searrow$

$\Rightarrow f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt$

$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$

$\Rightarrow -f(k) \leq -\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq -f(k+1)$

$\Rightarrow 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

c/c $(\forall k \in \mathbb{N})\quad 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

b- on a $(\forall k \in \mathbb{N}) : 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=0}^{n-1} 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq f(0) - f(n)$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 0 \leq S_n \leq f(0)$ car $f(n) \geq 0$

$f(n) \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$

c/c $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$.

2-a- On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k - \sum_{k=0}^{n-1}$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad S_{n+1} - S_n = \Delta_n \geq 0$

donc (S_n) est croissant.

b- On a (S_n) est croissante et majorée alors (S_n) est convergente.

c- posons $\lim_{n \to +\infty} S_n = l$

on a $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante

alors $S_1 \leq S_n \leq \frac{1}{2}\ (\forall n \in \mathbb{N})$

donc $\Delta_0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}\quad \forall n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \Delta_0 \leq l \leq \frac{1}{2}$

donc $f(0) - \int_0^1 f(x)\,dx \leq l \leq \frac{1}{2}$

donc $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$.

-Complexe

Correction d'examen BAC 2sm 2022 1 s

Ex 2

1- On a $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow j^3 = e^{i2\pi} = 1$

On a $j^3 = 1 \Rightarrow j^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow (j-1)(1+j+j^2) = 0$

$\Rightarrow j = 1$ ou $1 + j + j^2 = 0$

$\Rightarrow 1 + j + j^2 = 0$ car $j \neq 1$.

C/c $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

2-a- On a : $\Delta = (mj^2)^2 - 4m^2 j$

$= m^2(j^4 - 4j)$

On a $j^3 = 1 \Rightarrow j^4 = j$

donc $\Delta = m^2(j - 4j) = -3jm^2$

mais $(1-j)^2 = 1 - 2j + j^2 = -j - 2j = -3j$

car $1 + j^2 = -j$

donc $\Delta = [m(1-j)]^2$

b- On a $\Delta = [m(1-j)]^2$

donc $m(1-j)$ est une racine carré de Δ

et par suite les solutions de l'équation (E_m) sont $z_1 = \frac{-mj^2 - m(1-j)}{2} = \frac{-m(j^2+1-j)}{2}$

$= \frac{-m \times (-2j)}{2}$ $(1 + j^2 = -2j)$

$\Rightarrow z_1 = mj$

On a $z_2 = \frac{-mj^2 + m(1-j)}{2} = \frac{m(-j^2+1-j)}{2}$

$= \frac{2m}{2} = m$ car $-j^2 - j = 1$.

C/c $z_1 = mj$ et $z_2 = m$.

$S = \{m, mj\}$

3- On a $z_1 + z_2 = -mj^2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

$\Rightarrow (z_1 + z_2)^{2022} = (2)^{1011} \times e^{i\frac{7\times 2022}{12}\pi}$

or $\frac{7 \times 2022}{12}\pi \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow (z_1 + z_2)^{2022} = 2^{1011} \times e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2^{1011} i$

donc $(z_1 + z_2)^{2022}$ est imaginaire pur

Complexe

II)

1- On a $1+j \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ et $|1+j| = |j^2| = 1$.

alors φ est une rotation de centre O et d'angle de mesure :

$\arg(j+1) \equiv \arg(-j^2)\,[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

2- On a $\varphi(A) = A' \Rightarrow a' = (1+j)m$

$\Rightarrow \boxed{a' = -mj^2}$

$\varphi(B) = B' \Rightarrow b' = (1+j)mj$

$\Rightarrow b' = -j^3 m$

$\Rightarrow \boxed{b' = -m}$

$\varphi(C) = C' \Rightarrow c' = (1+j)mj^2$

$\Rightarrow c' = (j^2+j^3)m$

$\Rightarrow c' = (j^2+1)m$

$\Rightarrow \boxed{c' = -mj}$

b- On a

$$p+qj+rj^2 = \frac{-mj^2+mj}{2} + \left(\frac{-m+mj^2}{2}\right)j + \left(\frac{m-mj}{2}\right)j^2$$

$$= \frac{-mj^2+mj-mj+m+mj^2-m}{2} = 0$$

c/c $p+qj+rj^2 = 0$

c- On a $p+qj+rj^2 = 0$

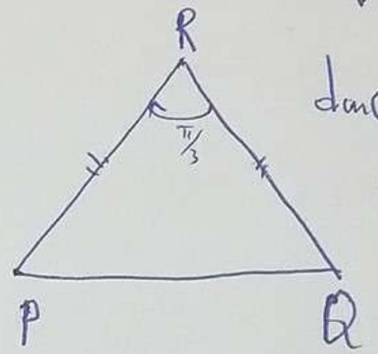
$\Rightarrow p+qj+r(-1-j) = 0$

$\Rightarrow p-r+j(q-r) = 0$

$\Rightarrow \frac{p-r}{q-r} = -j = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$\Rightarrow \left|\frac{p-r}{q-r}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{p-r}{q-r}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

$\Rightarrow PR = QR$ et $(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RP}) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$



donc PRQ est équilatéral.

Ex8

1-a- On a $(x+1)^n - x^n = ny$

$\Rightarrow (x+1)^n - x^n \equiv 0\,[n]$

$\Rightarrow (x+1)^n \equiv x^n\,[n]$

et puisque $p|n$ alors

$(x+1)^n \equiv x^n\,[p]$

b- Montrons $p \wedge x = 1$

On a $p \wedge x = 1$ ou $p \wedge x = p$ (car p premier)

Supp $p \wedge x = p$

$\Rightarrow x \equiv 0\,[p]$

$\Rightarrow x^n \equiv 0\,[p]$

$\Rightarrow (x+1)^n \equiv 0\,[p]$

$\Rightarrow x+1 \equiv 0\,[p]$ car p est premier

$\Rightarrow 1 \equiv 0\,[p]$ car $x \equiv 0\,[p]$

$\Rightarrow p|1$ absurde

donc $x \wedge p = 1$

mq $(x+1) \wedge p = 1$

On a p est premier alors

$(x+1) \wedge p = 1$ ou $p \wedge (x+1) = p$

Supp $p \wedge (x+1) = p$

$\Rightarrow p | x+1$

$\Rightarrow x+1 \equiv 0\,[p]$

$\Rightarrow (x+1)^n \equiv 0\,[p]$

$\Rightarrow x^n \equiv 0\,[p]$

$\Rightarrow x \equiv 0\,[p]$ car p est premier

$\Rightarrow p|x$

$\Rightarrow p \wedge x = p$ absurde

donc $p \wedge (x+1) = 1$.

C/C $p \wedge x = 1$ et $p \wedge (x+1) = 1$

c- On a $x \wedge p = 1$ et $(x+1) \wedge p = 1$

et p est premier d'après le Theorem de Fermat $x^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $(x+1)^{p-1} \equiv 1\,[p]$

donc $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\,[p]$

2- Supp que n est pair alors.

$p = 2$

donc $x+1 \equiv x\,[2] \Rightarrow 2|1$ absurde

donc n est impair

3-a- Montrons que $n \wedge (p-1) = 1$

posons $n \wedge (p-1) = d$

Supp $d \neq 1$ alors $\exists$ q premier tq $q|d \Rightarrow q|n$ et $q|p-1$

$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{P}$ tq $q < p$ et $q|n$

absurde

donc $n \wedge (p-1) = 1$.

donc $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tq $nu + (p-1)v = 1$

b- On a $u = q(p-1) + r$

$\Rightarrow nu = nq(p-1) + nr$

$\Rightarrow 1 - v(p-1) = nq(p-1) + nr$

$\Rightarrow nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

c- On a $v' = -(v+nq)$

donc $nr = 1 + (p-1)v'$

Supp que $v' < 0$

donc $0 \leq nr < 1$

$\Rightarrow nr = 0$

$\Rightarrow r = 0$

donc $p-1 \mid u$

et par suite $p-1 \mid nu + (p-1)v = 1$

$\Rightarrow p-1 = 1$

$\Rightarrow p = 2$ absurde car n est impair

donc $v' \geq 0$

d- On a $(x+1)^n \equiv x^n [p]$

$\Rightarrow (x+1)^{nr} \equiv x^{nr} [p]$

$\Rightarrow (x+1)^{1+(p-1)v'} \equiv x^{1+(p-1)v'} [p]$

$\Rightarrow (x+1) \times \left((x+1)^{p-1}\right)^{v'} \equiv x \times \left(x^{p-1}\right)^{v'} [p]$

$\Rightarrow x + 1 \equiv x [p] \Rightarrow 1 \equiv 0 [p]$

$\Rightarrow p \mid 1$ absurde

donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

Algebre 1 **Correction d'examen bac 2sm 2022 : prof AIT CHEIKH ABDELLAH**

Ex4

1-a- Montrons que E est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

on a $E \subset M_2(\mathbb{R})$

$E \neq \emptyset$ car $O = M(0,0) \in E$

soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux elements de E on a : $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$

$M(a,b) - M(c,d) = M(a-c, b-d) \in E$

car $(a-c, b-d) \in \mathbb{Z}^2$

donc E est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

b-

on a $M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ac+3bd & 3(ad+bc) \\ ad+bc & ac+3bd \end{pmatrix}$

$= M(ac+3bd, ad+bc)$

c/c $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac+3bd, ad+bc)$

c) Montrons que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire

on a E est un s.g de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

alors $(E,+)$ est un groupe commutatif

on a $\forall M(a,b), M(c,d) \in E$

$M(a,b) \times M(c,d) = M(ac+3bd, ad+bc) \in E$

donc E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

et comme $\times$ est associative et distributive par rapport à + dans $M_2(\mathbb{R})$ et admet un element neutre $I \in E$

$I = M(1,0)$

alors $\times$ est associative et distributive par rapport à + dans E et I est l'element neutre de E par la loi $\times$

donc $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire

et comme

$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$

$M(a,b) \times M(c,d) = M(ac+3bd, ad+bc)$

$= M(ca+3db, cb+da)$

$= M(c,d) \times M(a,b)$

alors $\times$ est commutative

c/c $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire

2- on a :

soient $M(a,b)$; $M(c,d)$ deux éléments de E.

On a $\varphi(M(a,b)\times M(c,d)) = \varphi(M(ac+3bd, ad+bc))$

$= |(ac+3bd)^2 - 3(ad+bc)^2|$

$= |ac^2 + 9(bd)^2 - 3(ad)^2 - 3(bc)^2|$

On a $\varphi(M(a,b))\times\varphi(M(c,d))$

$= |a^2-3b^2| \times |c^2-3d^2|$

$= |(a^2-3b^2)(c^2-3d^2)|$

$= |(ac)^2 - 3(ad)^2 - 3(bc)^2 + 9(bd)^2|$

donc $\varphi(M(a,b)\times M(c,d)) = \varphi(M(a,b))\times\varphi(M(c,d))$

donc φ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

3-a- on a d'après 1-b

$M(a,b)\times M(a,-b) = M(a^2-3b^2, -ab+ab)$

$= M(a^2-3b^2, 0)$

$= (a^2-3b^2)I$

b- puisque φ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

et $M(a,b)$ est un inversible dans $(E,\times)$ alors $\varphi(M(a,b))$ est inversible dans $(\varphi(\mathbb{Z}),\times)$

et car les seuls elements inversibles dans $(\varphi(\mathbb{Z}),\times)$ sont 1 et -1

alors $\varphi(M(a,b)) = 1$ car $\varphi(M(a,b))$ est positif.

car $\exists u\in\varphi(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} / \varphi(M(a,b))\times u = 1$

$\Rightarrow \varphi(M(a,b)) / 1 \Rightarrow \underset{\geq 0}{\varphi(M(a,b))} = 1$

c- supposons que $\varphi(M(a,b)) = 1$

$\Rightarrow a^2-3b^2 = 1$ ou $a^2-3b^2 = -1$

1er cas si $a^2-3b^2 = 1$

on a $M(a,b)\times M(a,-b) = I$

donc $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ ($\times$ est commutatif)

et $M^{-1}(a,b) = M(a,-b)$

2e cas $a^2-3b^2 = -1$

$M(a,b)\times(-M(a,-b)) = I$

alors $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ $\times$ est commutatif

et $M^{-1}(a,b) = -M(a,b) = M(-a,b)$

4-a. montrons qu' :

$\varphi(M(a,b)) = 0 \iff a = b = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Facile $a = b = 0 \Rightarrow \varphi(M(a,b)) = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ supp $\varphi(M(a,b)) = 0$ et mq $a = b = 0$

on a $a^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 3b^2$

supp $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

supp $a \neq 0$

alors $\frac{1}{3} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ absurde

de même si $b \neq 0$ $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ absurde.

donc $a = b = 0$

d'où $\varphi(M(a,b)) = 0 \iff a = b = 0$

b- Montrons que $(E, +, \times)$ est intègre

soit $M(a,b)$, et $M(c,d)$ deux matrices de E tq

$M(a,b) \times M(c,d) = \mathbb{O} = M(0,0)$

mq $M(a,b) = 0$ ou $M(c,d) = 0$

on a $M(a,b) \times M(c,d) = M(0,0)$

$\Rightarrow \varphi(M(a,b) \times M(c,d)) = \varphi(M(0,0))$

$\Rightarrow \varphi(M(a,b)) \times \varphi(M(c,d)) = 0$

$\Rightarrow \varphi(M(a,b)) = 0$ ou $\varphi(M(c,d)) = 0$

$\Rightarrow a = b = 0$ ou $c = d = 0$

$\Rightarrow M(a,b) = 0$ ou $M(c,d) = 0$

donc $(E, +, \times)$ est un anneau intègre

c- on a $M(2,0)$ n'est pas inversible dans E, car

$\varphi(M(2,0)) = 4 \neq 1$

donc $(E, +, \times)$ n'est pas un corps