التمرين الأول:

السؤال 1 - أ:

*** الطريقة الأولى:**

(x,y) حل للمعادلة $(D) \Leftrightarrow 7x^3-13y=5$

ليكن $d = x\wedge 13$ إذن $d/13$ إذن $d\in\{1;13\}$

(13 أولي)

إذا كان $d=13$ فإن:

$13 = x\wedge 13$

$\Rightarrow 13/x$

$\Rightarrow x = 13k \;;\exists k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 7\times(13k)^3 - 13y = 5$

$\Rightarrow 13\times(\underbrace{7\times(13^2k^3) - y}_{\exists k'\in\mathbb{Z}}) = 5$

$\Rightarrow 13\times k' = 5$

$\Rightarrow 13/5$ لا يمكن

إذن $d\neq 13$ يعني أن $\boxed{d=1}$

*** الطريقة الثانية:**

الحالات الممكنة لبواقي القسمة الإقليدية لعدد صحيح طبيعي على 5 هي: $\{0;1;2;3;4\}$

* واضح أن إذا كان $\begin{cases}x\equiv 0[5]\\ y\equiv 0[5]\end{cases}$ فإن: $(7x^3-13y)\equiv 0[5]$ يعني أن $5\equiv 0[5]$

إذن هذه الحالة ممكنة

نفترض الآن أن: $\begin{cases}x\equiv r[5]\\ y\equiv r'[5]\end{cases}$ مع r و r' ينتميان إلى $\{1,2,3,4\}$

إذن: $\begin{cases}7x^3\equiv 7r^3[5]\\ -13y\equiv -13r'[5]\end{cases}$

$\Rightarrow (7x^3-13y)\equiv(7r^3-13r')[5]$

$\Rightarrow 5\equiv(7r^3-13r')[5]$

$\Rightarrow 7r^3-13r'=0$ أو $7r^3-13r'=5$

$\Rightarrow 7r^3=13r'$ أو $7r^3=(5+13r')$

مع $r\in\{1;2;3;4\}$ و $r'\in\{1;2;3;4\}$

وهذا مستحيل

لأن: *إذا كان $r'=1$

$\Rightarrow 7r^3=13$ أو $7r^3=18$

$\Rightarrow r=1,22$ أو $r=1,36$

$\Rightarrow r\notin\{1;2;3;4\}$

*إذا كان $r'=2$

$\Rightarrow 7r^3=26$ أو $7r^3=31$

$\Rightarrow r=1,54$ أو $r=1,63$

$\Rightarrow r\notin\{1;2;3;4\}$

*إذا كان $r'=3$

$\Rightarrow 7r^3=39$ أو $7r^3=44$

$\Rightarrow r=1,76$ أو $r=1,83$

$\Rightarrow r\notin\{1;2;3;4\}$

*إذا كان $r'=4$

$\Rightarrow 7r^3=52$ أو $7r^3=57$

$\Rightarrow r=1,93$ أو $r=1,99$

$\Rightarrow r\notin\{1;2;3;4\}$

من خلال هذا البرهان بالخلف نستنتج أن فرضية $\begin{cases}x\equiv r[5]\\ y\equiv r'[5]\end{cases}$ $r,r'\in[\![1,4]\!]$ غير ممكنة

إذن: $\begin{cases}x\equiv 0[5]\\ y\equiv 0[5]\end{cases}$

$\Rightarrow x=5k$ و $y=5k'$ $\quad k,k'\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 7x^3-13\times 5k'=5$

$\Rightarrow x(7x^2)-13(5k')=5$

$\Rightarrow x(7\cdot(5k)^2)-13(5k')=5$

$\Rightarrow x(7.5.K^2)+13(-K')=1$

$\Rightarrow xu+13v=1$ $\left| \begin{array}{l} u=7.5.K^2\in\mathbb{Z} \\ v=-K'\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \boxed{x\wedge 13=1}$ حسب مبرهنة Bezout

* السؤال 1) ب:

لدينا 13 أولي و $x\wedge 13=1$ إذن حسب مبرهنة Fermat :

$x^{13-1}\equiv 1[13] \Rightarrow \boxed{x^{12}\equiv 1[13]}$

* السؤال 1) ج-

لدينا $7x^3-13y=5$

$7x^3-5=13y$

$13\equiv 0[13]$ $\Rightarrow 13y\equiv 0[13]$

$a\equiv b[n]$ $\Rightarrow (7x^3-5)\equiv 0[13]$ ✓

$a+c\equiv b+c[n]$

$a-c\equiv b-c[n]$ $\Rightarrow \boxed{7x^3\equiv 5[13]}$ ① و لدينا $\boxed{70\equiv 5[13]}$ ②

$70=13\times 5+5$

65

① و ② $\Rightarrow$ $7x^3\equiv 70[13]$ $\rightarrow 7x^3-70\equiv 0[13]$

$a\times c\equiv b\times c[n]$ $\Rightarrow 13/(7x^3-70)$

$a\equiv c[n] \Leftarrow$ $a\equiv b[n]$ و $b\equiv c[n]$

$(x^3)^2\equiv 10^2[13]$ ④ $\Rightarrow 13/7(x^3-10)$

$x^6\equiv 100[13]$

$x^6\equiv 9[13]$ $\Rightarrow 13/x^3-10$ " (Gauss مبرهنة) " $13\wedge 7=1$ لأن

$x^{12}\equiv 81[13]$ $x^3-10\equiv 0[13]$

$x^{12}\equiv 3[13]$ $\Rightarrow \boxed{x^3\equiv 10[13]}$

$(81=13\times 6+3)$

$\begin{array}{r|l} 81 & 13 \\ 78 & 6 \\ 3 & \end{array}$

* السؤال 1) د:

$x^3\equiv 10[13] \Rightarrow x^3\equiv -3[13]$ " $10\equiv -3[13]$ لأن "

$10=13\times 1-3$

10^4

$\Rightarrow (x^3)^4\equiv(-3)^4[13]$

$10000[13]$

$\Rightarrow x^{12}\equiv 81[13]$

$\begin{array}{r|l} 100 & 13 \\ 91 & 7 \\ 9 & \end{array}$

$\Rightarrow x^{12}\equiv 3[13]$ " $81\equiv 3[13]$ لأن " $100=13\times 7+9$

$\Rightarrow 100\equiv 9[13]$

* السؤال ②:

باستعمال البرهان بالخلف نفرض أن (D) لها حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

إذن:

$x^{12}\equiv 1[13]$ و $x^{12}\equiv 3[13]$

$\Rightarrow 3\equiv 1[13] \Rightarrow 2\equiv 0[13]$ $2=13\times k+0$?? $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ 13 يقسم 2 لا يمكن

إذن D ليس لها حل في $\mathbb{Z}^2$!!

إشارة:

المعادلة $(D): 7x^3-13y=5$ يمكن أن نؤول إلى المعادلة $(E): 7a-13b=5$

التي يمكن حلها في $\mathbb{Z}^2$ بالطريقة التقليدية:

13	7
6	1

$\Rightarrow 13 \wedge 7 = 7 \wedge 6$

7	6
1	1

$\Rightarrow 7 \wedge 6 = 6 \wedge 1 = 1$

6	1
0	6

$\Rightarrow$ قف:

$\Rightarrow PGCD(13,7)=1$

بما أن 5 لا يقسم 1 إذن (E) ليس لها حل. إذن (D) ليس لها حل أيضا

التمرين الثاني

* السؤال 1) أ):

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} ; (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\right\}$$

أولا $E \subset M_2(\mathbb{R})$ لأن مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 التي تكتب كالشكل الظاهر أعلاه.

ليكن $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & y'\end{pmatrix}$ مصفوفتين من E.

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x'+xy'\\ 0 & yy'\end{pmatrix}\in E$$

لأن: $x'+xy'\in\mathbb{R}$ و $yy'\in\mathbb{R}^*$ | $y\in\mathbb{R}^*$, $y'\in\mathbb{R}^*$

الاستنتاج:

$$\forall \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & y'\end{pmatrix}\in E : \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & y'\end{pmatrix}\in E$$

إذن $\times$ قانون تركيب داخلي في E.

ومنه: E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

* السؤال 1) ب):

* إذا كانت $\times$ تبادلية في E، إذن سنحصل على:

$$\forall \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & y'\end{pmatrix}\in E : \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & y'\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$$

* ومنه لكي نبين أن $\times$ غير تبادلية يكفي أن نأتي بمثال مضاد.

$$\begin{pmatrix}1 & x+x'y\\ 0 & y'y\end{pmatrix}$$

لدينا : $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x'+xy' \\ 0 & yy' \end{pmatrix}$

- العبارة yy' تبادلية، إذن المثال المضاد يتعلق بالعبارة $x'+xy'$.
- يكفي أن نأخذ $x \neq x'$ و y, y' كيفما كانوا.

* ليكن $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ينتميان إلى E
* لدينا :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq$$

ومنه $\times$ غير تبادلي في E

* إنتبه أن تقول :

بما أن $\times$ غير تبادلية في E وبما أن $E \subset M_2(\mathbb{R})$ إذن $\times$ غير تبادلية في $M_2(\mathbb{R})$ هذا خطأ ☹ لأنه يوجد أجزاء مجموعات لـ $M_2(\mathbb{R})$ حيث يكون الضرب تبادليا فيها.

* السؤال (1) ج) :

حساب تطبيقي بسيط فقط :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x - \frac{x}{y} \times y \\ 0 & \frac{y}{y} \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \\ 0 & \frac{y}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* السؤال (2) :

لديك الإختيار بين طريقتين، الأولى تقوم على البرهان عن طريق تعريف زمرة

- $\times$ ق.ت.د في E (الإستقرار) ✓
- $\times$ قانون تجميعي في E (استقرار E في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$) ✓ $(E \subset M_2(\mathbb{R}), \times)$
- $(E, \times)$ يحتوي على عنصر محايد (من خلال الإستقرار و $I \in E$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(0,1)$
- عناصر E متماثلة بالنسبة لـ $\times$ (تم البرهان عليه) $1-\text{ج}$ و $\in E$
- $\times$ غير تبادلية في E، تم البرهان عليه، فقط يجب تعليل زمرة غير تبادلية

إذن نستنتج أن $(E, \times)$ زمرة غير تبادلية

* الطريقة الثانية :

تتأسس حول مفهوم الزمرة الجزئية حيث يجب تبيين :

- $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ زمرة (من خلال الدرس)
- $E \subseteq M_2(\mathbb{R})$
- $\forall A, B \in E ; A \times sym(B) \in E$
- $\times$ غير تبادلية في E

بالنسبة للنقطة الثالثة فهي بسيطة:

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} \times sym\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{b}\\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & \left(\frac{x}{b} - \frac{a}{b}\right)\\ 0 & \frac{y}{b}\end{pmatrix} \in E$$

$\left(\frac{x-a}{b}\right) \in \mathbb{R}$

$y \neq 0 \ ; \ b \neq 0$ لأن

السؤال 3) أ):

$\boxed{\begin{array}{l}\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \longrightarrow (F, \times)\\ \quad x \longmapsto M(x)\end{array}}$

ليكن: $F = \left\{M(x) = \begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R}^*\right\}$ ، وليكن

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^{*2}$ ، لدينا:

$$\varphi(x) \times \varphi(y) = M(x) \times M(y)$$

$\varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(x \times y)$

$$= \begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & y-1\\ 0 & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & y-1+(x-1)y\\ 0 & xy\end{pmatrix}$$

$\cancel{y}-1+xy-\cancel{y}$

$$= \begin{pmatrix}1 & \cancel{xy}-1\\ 0 & \cancel{xy}\end{pmatrix} = M(X), \ X = xy \in \mathbb{R}^*$$

$y = f(x) \quad x?$

$$\begin{pmatrix}1 & xy-1\\ 0 & xy\end{pmatrix} = M(xy) \in E \quad \text{"}(xy \in \mathbb{R}^* \text{ لأن})\text{"}$$

$$= \varphi(xy)$$

إذن φ تشاكل $\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \longrightarrow (F, \times)^*$

$x \longmapsto M(x)$

السؤال 3) ب):

يجب أن نبين أولا أن φ تقابلي.

لتكن $M(a)$ مصفوفة من F ، سنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة ذات المجهول x

$a \in \mathbb{R}^*$

y

$$\overset{?}{\varphi}(x) = M(a) \iff M(x) = M(a)$$

$$\iff \begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a-1\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

$$\iff x = a$$

إذن: $\forall M(a) \in F \ ; \ \exists! x = a \in \mathbb{R}^* : \varphi(x) = M(a)$

يعني أن: φ تشاكل تقابلي. إذن: $\varphi(\mathbb{R}^*, \times) = (F, \times)$

• بما أن $(\mathbb{R}^*, \times)$ زمرة تبادلية إذن $\varphi(\mathbb{R}^*, \times) = (F, \times)$ زمرة تبادلية أيضا

• خاصيات $(F, \times)$ مستوحاة من $(\mathbb{R}^*, \times)$ عبر التطبيق φ.

• بالنسبة للزمرة $(\mathbb{R}^*, \times)$ لدينا:

• $\times$ تبادلية في $\mathbb{R}^*$

- × تجميعية في $\mathbb{R}^*$
- 1 هو العنصر المحايد في $\mathbb{R}^*$
- $\frac{1}{x}$ مقابل في $\mathbb{R}^*$

إذا بالنسبة للرمز $(F,\times)$ لدينا:

- × تبادلية في F
- × تجميعية في F
- $\varphi(1)=M(1)=I$ هو العنصر المحايد في F

العنصر المحايد في $(\mathbb{R}^*,\times)$ هو 1

$$\varphi(1)=M(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$sym(M(x))=sym(\varphi(x))=\varphi(sym(x))=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=M\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$sym(M(x))=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{x}-1\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} z^3-2mz^2+2m^2z-m^3 & z-m \\ \hline -\ z^3-mz^2 & z^2-mz+m^2 \\ 0-mz^2+2m^2z-m^3 & \\ -\ -mz^2+m^2z & \\ 0\quad m^2z-m^3 & \\ -\ m^2z-m^3 & \\ 0\quad 0 & \end{array}$$

التمرين الثالث

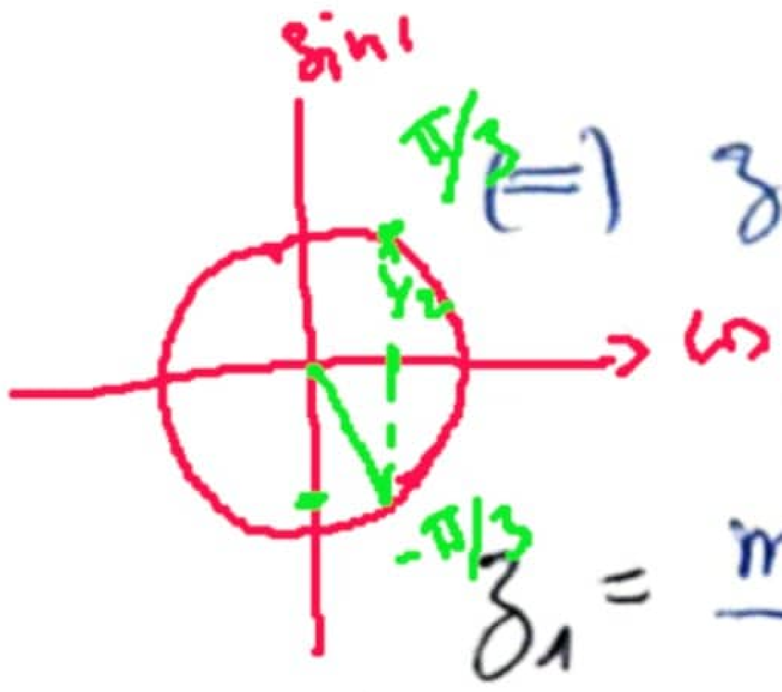
الفقرة الأولى:

السؤال 1):

$$(E):\ z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$$

نقوم بالقسمة الإقليدية للطرف الأول على $(z-m)$ المعادلة (E) تصبح:

$$(z-m)(z^2-mz+m^2)=0$$



$(E)\Leftrightarrow z-m=0$ و $z^2-mz+m^2=0 : (E')$

$$\Delta_{E'}=(-m)^2-4m^2=-3m^2=(\sqrt{3}\,i\,m)^2$$

$$z_1=\frac{m-\sqrt{3}\,i\,m}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)m=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)m=\boxed{m e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_2=\frac{m+\sqrt{3}\,i\,m}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)m=m\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{m e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\frac{-b\pm\delta}{2a}$$

إذا مجموعة حلول المعادلة (E):

$$S=\left\{m\ ;\ m e^{i\frac{\pi}{3}}\ ;\ m e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$$

السؤال 2) أ):

- الطريقة الأولى:

$$z^2-Sz+P=0$$

الجمع   الضرب

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{m}{m^2}=\boxed{\frac{1}{m}}$$

بصفة عامة: إذا كان z_1 و z_2 حلين للمعادلة $az^2+bz+c=0$ إذن

$$\boxed{z_1+z_2=\frac{-b}{a}} \quad و \quad \boxed{z_1z_2=\frac{c}{a}}$$

- الطريقة الثانية:

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\left(me^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-1}+\left(me^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{-1}=\frac{1}{m}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{me^{i\pi/3}}+\frac{1}{me^{-i\pi/3}}=\frac{1}{m}\left(e^{-i\pi/3}+e^{i\pi/3}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)e^{i0}=\frac{1}{m}\times 2\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{m}}$$

$$=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{\frac{1}{m}}$$

السؤال 2) ب):

$m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i0} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 2\cos\left(\frac{0-\frac{\pi}{3}}{2}\right) e^{i\left(\frac{0+\frac{\pi}{3}}{2}\right)}$

$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_1 = m \cdot e^{-i\pi/3} = (1+e^{i\pi/3}) \times e^{-i\pi/3}$

$= e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3} \times e^{-i\pi/3}$; $e^a \times e^b = e^{a+b}$

$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \underbrace{e^{0i}}_{1}$; $(e^a)^n = e^{a\times n}$

$\boxed{z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$z_2 = m \cdot e^{i\pi/3} = (1+e^{i\pi/3})\, e^{i\pi/3}$

$= e^{i\pi/3} + (e^{i\pi/3})^2$

$= \cancel{\frac{1}{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$- \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{2\times\sqrt{3}\, i}{\cancel{2}}$

$= \boxed{\sqrt{3}\, i}$

ومنه: $z_1 = m e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} = \boxed{\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

$= \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

$= \boxed{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

$z_2 = m e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{\sqrt{3} i}$

الفقرة الثانية:

السؤال 1):

لدينا: $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{\cancel{m} e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\cancel{m} e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{-2i\frac{\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$

إذن النقط O, A, B غير مستقيمية

السؤال 2) أ): $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$r_1(O) = A \iff (z_A - z_P) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_P)$

$\iff m e^{i\frac{\pi}{3}} - p = i(-p)$

$\iff p(1-i) = m e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow p = \frac{1}{1-i} m \cdot e^{i\pi/3} = \frac{m(1+i)}{1^2 - i^2} \cancel{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$= \frac{m}{2} \times \sqrt{2} \times e^{i\pi/4} \times e^{i\pi/3}$

$\frac{m\sqrt{2}}{2} \times e^{i\frac{3\pi+4\pi}{12}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \times m \times e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$\iff p(e^{i0} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) = m e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\iff p \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = m e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\iff p = \frac{m e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{m}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{12}} = \boxed{\frac{m\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

$r_3(B) = O \iff (z_O - z_R) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_R)$

$\iff -r = i\left(m e^{-i\frac{\pi}{3}} - r\right)$

$\iff -r = i m e^{-i\frac{\pi}{3}} - i r$

$\iff r(i-1) = \underbrace{i m e^{-i\frac{\pi}{3}}}_{b}$

$r = \frac{1}{i-1} \times i b$

$= \frac{1}{i^2 - 1^2}(1+i) \times i b$

$= \frac{-1}{2}(i-1) b = \frac{1}{2}(1-i) b$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) \times m \cdot e^{-i\pi/3}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} m \times e^{-i\pi/4} e^{-\pi/3}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} m \times e^{i\frac{-3\pi-4\pi}{12}}$

$\Leftarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{2}}{2} m \times e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$

$(\Leftrightarrow)\ r\left(e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i\pi}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}}\, m\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$(\Leftrightarrow)\ r\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}=m e^{i\frac{\pi}{6}}$

$(\Leftrightarrow)\ r\cdot 2\cdot\frac{\sqrt2}{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}=m e^{i\frac{\pi}{6}}$

$(\Leftrightarrow)\ r=\frac{m e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{m}{\sqrt2}e^{i\frac{7\pi}{12}}=\boxed{\frac{m\sqrt2}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$

السؤال 2 ب) :

$r_2(A)=B\ (\Leftrightarrow)\ (z_B-z_Q)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_Q)$

$(\Leftrightarrow)\ m e^{i\frac{\pi}{3}}-q=i\left(m e^{i\frac{\pi}{3}}-q\right)$ $\Leftrightarrow\ b-q=i(a-q)$

$b-q=ia-iq$

$(\Leftrightarrow)\ m e^{-i\frac{\pi}{3}}-q=i m e^{i\frac{\pi}{3}}-iq$ $\quad iq-q=ia-b$

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=5\pi/6$

$(\Leftrightarrow)\ q(i-1)=m\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$ $\quad q(i-1)=ia-b$

$q=\frac{1}{i-1}(ia-b)$

$(\Leftrightarrow)\ q\times\left(e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i\pi}\right)=m\left(2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

$=\frac{1}{i^2-1^2}(1+i)(ia-b)$

$(\Leftrightarrow)\ q\times\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}=m\left(2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$(\Leftrightarrow)\ q=\frac{m\cdot2\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

$=\frac{1}{2}(-1-i)(\quad)$

$=\frac{\sqrt2}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\times m e^{i\frac{\pi}{3}}-m e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$

$(\Leftrightarrow)\ \boxed{q=m\cdot\sqrt2\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

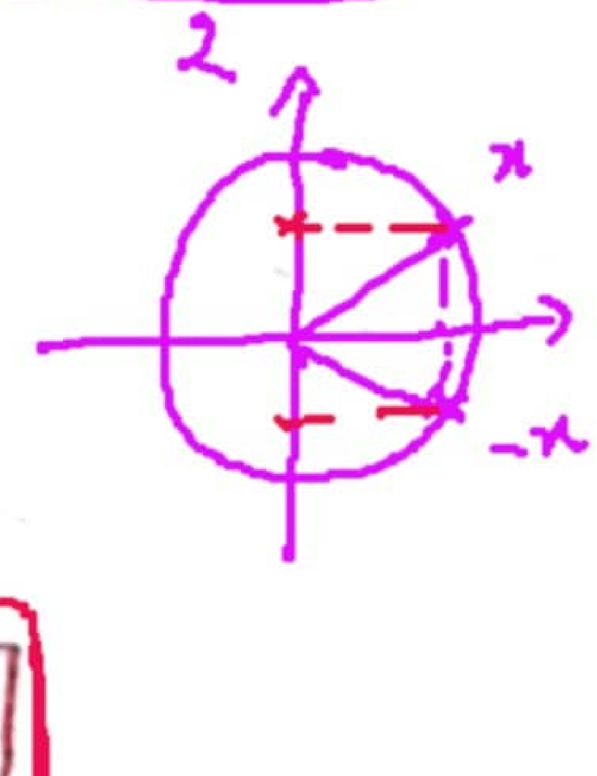
$=\frac{\sqrt2}{2}m\times e^{-i\frac{3\pi}{4}}\times\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}-e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)$

السؤال 3)

$\frac{z_R-z_P}{z_Q-z_O}=\frac{\frac{m\sqrt2}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}-\frac{m\sqrt2}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}{m\sqrt2\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

$=\frac{\cancel{m}\cancel{\sqrt2}}{2\cancel{m}\cancel{\sqrt2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\left(e^{-i\frac{7\pi}{12}}-e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)$

$\frac{\frac{-7\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}}{2}$



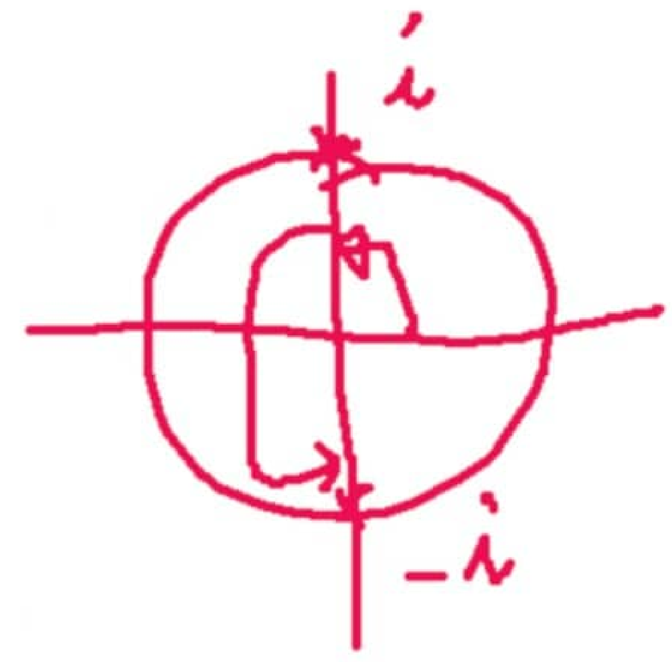
$=\frac{1}{2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\left(2i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\overset{1}{\cancel{e^{i0}}}\right)$

$=\frac{1}{\cancel{2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}}\left(\cancel{-2}i\,\cancel{\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)}\right)=\boxed{-i}$

ومنه:

$$\boxed{\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O} = -i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O}\right| = |-i| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O}\right) \equiv \arg(-i)\ [2\pi] \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} |z_R - z_P| = |z_Q - z_O| \\ \arg\left(\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O}\right) \equiv \pi + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PR = OQ \\ \overline{(\overrightarrow{OQ}\,;\overrightarrow{PR})} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PR = OQ \\ (OQ) \perp (PR) \end{cases}$$

التمرين الرابع :

- السؤال (1) : لتكن $\varphi(t) = \ln t$ إذن : φ متصلة على $\mathbb{R}_+^*$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$. نأخذ $x \in]0,+\infty[$.

إذن :

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \exists c \in]x; x+1[\; ; \; \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{(x+1)-(x)} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow x < c < x+1 \; ; \; \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c} \qquad \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \; ; \; \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c} \qquad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \; , \; \forall x \in]0,+\infty[$$

- السؤال 2 - f :

لدينا :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

و

$$\forall x > 0 \; ; \; \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} < x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x^2}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right) < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} < (x)$$

$$\lim_{0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0 \qquad x \to 0^+ \; \boxed{0} \qquad x \to 0^+ \; \lim_{0^+} x = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = f'_d(0) \in \mathbb{R}$$

منه f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر

السؤال 2-ب) : لدينا، $\forall x>0 ;\ \frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x+1} < x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x^3}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{x+1}\right) < f(x) < x^2$$

$$\frac{x^3}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{+\infty}$$

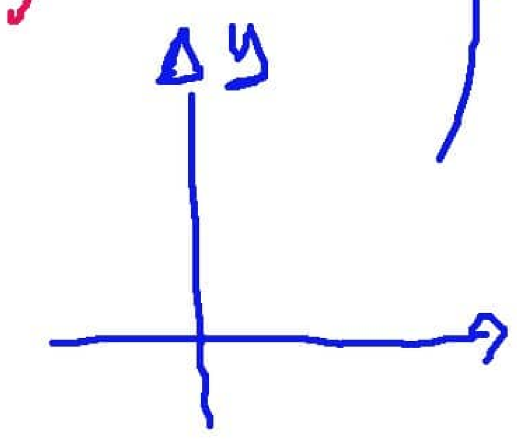
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty} \quad (1)$$

وبما أن: $\left(\frac{1}{x}>0\right)$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)<\frac{f(x)}{x}<x$$

$$\frac{x^2}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{+\infty}$$

$\lim_{+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}\right)=+\infty$ ق



$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty} \quad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب (OY).

السؤال 3-أ) :

لدينا $x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$. ولدينا أيضا الدالة اللوغاريتم النبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ إذن الدالة $x\mapsto\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق. ومنه فإن الدالة $x\mapsto x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*_+$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*_+$.

ولدينا:

$(\forall x>0)\ ;\ f'(x) = \left(x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$

$= 3x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$ $\ln u' = \frac{u'}{u}$

$= 3x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3 \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$ $\frac{1}{\frac{x+1}{x}}$

$= 3x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x+1}.$

$= 3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)}\right)$ ✓

السؤال 3 - ب):

لدينا:

$\frac{1}{3(x+1)} < \begin{cases} \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) ; (P) \text{ حسب} \\ \frac{1}{3(x+1)} < \frac{1}{x+1} \quad (x>0 \text{ لأن}) \end{cases}$

$\frac{1}{3} < 1$

منه:

$\frac{1}{3(x+1)} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)} > 0$

$\Rightarrow 3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)}\right) > 0 \quad (x>0)$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ ; \ \forall x \in [0;+\infty[$

منه f تزايدية تماما على $[0;+\infty[$.

السؤال 3 - ج):

x	$\boxed{0}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\boxed{+\infty}$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$\boxed{0} \nearrow \boxed{+\infty}$

12

السؤال 4 - أ) : ليكن $x>0$: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$

و قابلة للاشتقاق على I كخارج دوال قابلة للاشتقاق على I

$$\Rightarrow g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{x\left\{f'(x)-\cancel{x'}f(x)\right\}}{x^2}$$

$$=\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(x+1)}\right)-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$3x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}(x+1)}$

$$=(3x-x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{x+1}$$ ✓

$$=2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{x+1}$$ ✓

$$=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(x+1)}\right).$$

بنفس الطريقة كما في السؤال 3 - ب) نبين أن:

$$2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(x+1)}\right)>0$$

منه g دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$

السؤال 4 - ب) : الدالة $g:]0;+\infty[\to g(]0;+\infty[)$ تقابل لأن

g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

$$g(]0;+\infty[)=\left]\lim_{x\to0^+}g(x);\lim_{x\to+\infty}g(x)\right[$$

$$=\left]\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x};\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\right[$$

$$=]0;+\infty[.$$

وحسب أن $g:]0;+\infty[\to]0;+\infty[$ تقابل:

$$\forall y \in]0;+\infty[\,,\ \exists! x \in]0;+\infty[: g(x) = y$$

من أجل $1 \in]0;+\infty[$ لدينا: $(\exists! \alpha \in]0;+\infty[) ; g(\alpha) = 1$

يعني أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$

$1 < \alpha < 2$?

لدينا: $\frac{f(1)}{1} = g(1) = f(1) = \ln 2 = 0,7$

و $g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{8\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2} = 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1,6$ $4 \times 0,4$

ولدينا $0,7 < 1 < 1,6 \Rightarrow g(1) < g(\alpha) < g(2)$

$$\Rightarrow g^{-1}(g(1)) < g^{-1}(g(\alpha)) < g^{-1}(g(2))$$

$$\Rightarrow 1 < \alpha < 2 \quad \underline{cqfd}$$

السؤال (4 - ج):

لدينا: $x = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

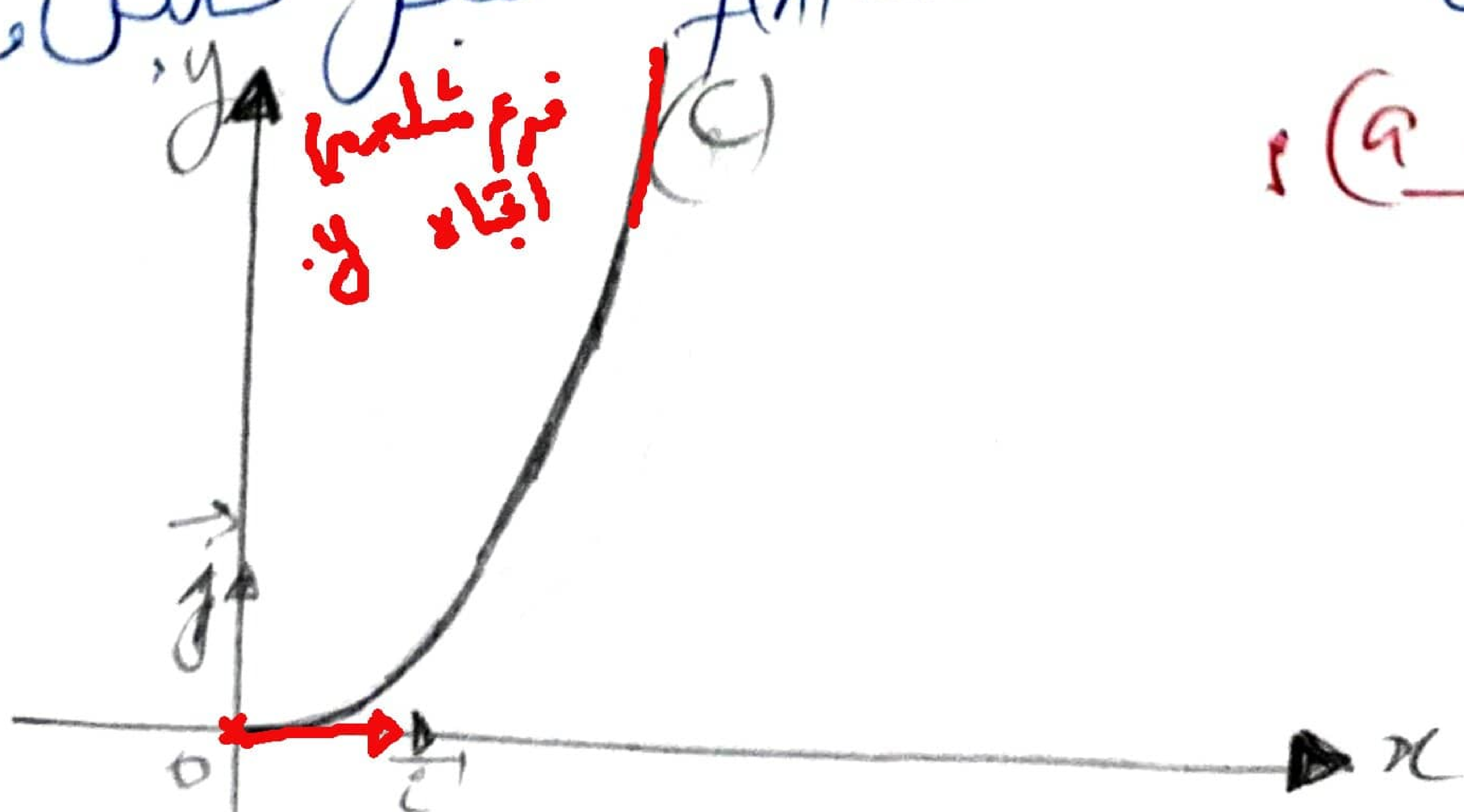
إذا كان $x \neq 0$ فإن: $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\Leftrightarrow g(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha$$

ومنه فإن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلين وحيدين 0 و α

السؤال (5 - أ):



السؤال (5-ب): لدينا: $f: I \mapsto f(I)$ تقابل لأنها دالة متصلة وتزايدية قطعا:

$$f(I) = f([0;+\infty[) = [f(0); \lim_{n \to +\infty} f(n)[$$

$$= [0;+\infty[= I$$

الجزء الثاني:

السؤال (1): نعتبر العبارة: $0 < U_n < \alpha$: (P_n)

← مرحلة التحقق:
من أجل $n=0$ لدينا: $0 < U_0 < \alpha$ إذن (P_0) عبارة صحيحة

← فرضية التراجع:
ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن (P_n) صحيحة.

لدينا:

$0 < U_n < \alpha \Longrightarrow (P_n)$ عبارة صحيحة.

$$\Longrightarrow f^{-1}(0) < f^{-1}(U_n) < f^{-1}(\alpha)$$

(f^{-1} تزايدية لأنها التقابل العكسي لـ f : تزايدية)

$$\Longrightarrow 0 < U_{n+1} < \alpha$$

$(f(0)=0)$ $(\cdot f(\alpha)=\alpha)$

$$\Longrightarrow (P_{(n+1)})$$ صحيحة

منه
$$\begin{cases} P(0) \text{ صحيحة} \\ \underset{\text{صحيحة}}{P(n)} \Longrightarrow \underset{\text{صحيحة}}{P(n+1)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

حسب مبدأ التراجع نستنتج أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 0 < U_n < \alpha$$

السؤال ٢) أ)

الدالة g متصلة في $]0,+\infty[$ إذن صورة كل مجال ينتمي إلى $]0,+\infty[$ هو مجال :

ومنه : $g(]0,\alpha[) =]\lim_{x\to 0^+} g(x) ; g(\alpha)[$

$$=]\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{f(x)}{x}\right) ; g(\alpha)[$$

$$=]0,1[$$

السؤال ٢) ب) : لدينا $g :]0,\alpha[\to]0,1[$ تقابل لأن g متصلة وتزايدية قطعا. إذن :

~~$(\forall y \in]0,1[)\ (\exists! x \in]0,\alpha[) : g(x) = y$~~

بعبارة أخرى : لدينا $(\forall x \in]0,\alpha[) : g(x) \in]0,1[$

إذن $\boxed{(\forall x \in]0,\alpha[) : g(x) < 1}$ $(*)$

لـ $x = U_n \in]0,\alpha[$ سنحصل على $g(U_n) < 1$

يعني أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{f(U_n)}{U_n} < 1$

" $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(U_n) < U_n$

(لأن f^{-1} تزايدية) $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n < f^{-1}(U_n)$ "

" $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n < U_{n+1}$

يعني أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا.

السؤال ٢) ج) :

. المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة لأنها تزايدية ومكبورة بـ α $(\forall n\in\mathbb{N} : U_n < \alpha)$

. المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بالعلاقة $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

. لدينا أيضا $U_0 \in [0,+\infty[$ و $f^{-1}([0,+\infty[) \subseteq [0,+\infty[$ و f^{-1} متصلة على $]0,+\infty[$

والمتتالية $(U_n)_n$ متقاربة عند l النهاية إذن l تحقق المعادلة $f^{-1}(l) = l$.

$$f^{-1}(l) = l \iff f(l) = l$$

$$\iff l \in \{0,\alpha\}$$

$0 < U_n < \alpha$

$$\iff l = \alpha \quad \text{لأن } (U_n)\nearrow \text{ و } \alpha > 0$$

الجزء الثالث :

السؤال 1) أ) :

لدينا $\forall x \geq 0 \; ; f(x) \geq 0$ و f متصلة في $[0,+\infty[$

إذا كانت $x < 1 \Rightarrow F(x) = \int_x^1 f(t)dt > 0$

$x > 1 \Rightarrow F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt < 0$ $= -\int_1^x f(t)dt < 0$

$x = 1 \Rightarrow F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$

السؤال 1) ب) :

لدينا f متصلة على $[0,+\infty[$ إذن f تقبل دوال أصلية على $[0,+\infty[$

إذن f تقبل دالة أصلية φ على $[0,+\infty[$ معرفة كما يلي :

$\int_a^t f(t)\,dt$ وتنعدم في a

$$\begin{cases} \varphi(t) = \int_1^t f(t)\,dt \; ; \; 1 \in [0,+\infty[\\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(t) = f(t) \; ; \; \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$\int_x^1 + \int_1^{2x} = \int_x^{2x} f(t)$

لدينا $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)dt = -\varphi(x)$.

إذن F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا :

$\forall x \geq 0 \; : F'(x) = -\varphi'(x) = -f(x) = -x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

السؤال 1) ج) :

$\forall x \geq 0 \; ; \; F'(x) = -f(x) \leq 0$

$\forall x \geq 0 \; ; \; f(x) \geq 0$:حسب

إذن F تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$

السؤال 2) أ) .

ليكن $x \geq 1$ و $t \geq 1$

$t \geq 1 \Rightarrow f(t) \geq f(1) \; ; \quad f \nearrow$ حسب $= \ln 2$

$\int_1^x f(t)\,dt \geq \int_1^x \ln 2\,dt$

$\Rightarrow \cancel{\int_x^1 f(t)dt \geq \int_x^1 \ln(2)dt} \; ; \; x \geq 1$

$-\int_x^1 f(x)\,dt \geq (x-1) \times \ln 2$

$-F(x) \geq (x-1)\ln 2 \Rightarrow \boxed{F(x) \leq (1-x)\ln(2)} \; ; \; x \geq 1$

السؤال 2) ب)

$F(x) \leq \underbrace{(1-x)\ln(2)}_{x \to +\infty}$ $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$.

$\boxed{-\infty}$ $\lim_{+\infty} (1-x)\ln 2 = -\infty$; Les Gendarmes باستعمال مبرهنة

السؤال 3) أ)

$$F(x)=\int_x^1 \underbrace{t^3}_{u'(t)}\times\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$$

$u'=t^3$ $\quad u=\frac{1}{4}t^4$

$v=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$ $\quad v'=$

$\frac{t^4}{t^2}\times\frac{t}{t+1}$

$$=\left[\frac{t^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1-\int_x^1\frac{t^4}{4}\left(\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t+1}{t}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\left(\frac{t^3}{1+t}\right)dt$$

السؤال 3) ب):

$$\int_x^1\left(\frac{t^3}{1+t}\right)dt=\int_x^1(t^2-t+1)dt-\int_x^1\left(\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$t>0$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right]_x^1-\left[\ln|t+1|\right]_x^1$$

$\ln a-\ln b$

$=\ln\frac{a}{b}$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)-\left[\ln(2)-\ln(x+1)\right]$$

$$=\frac{5}{6}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)$$

السؤال 3) ج)

$$F(x)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$$

$$=\cancel{\frac{\ln 2}{4}}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-\ln 2+\ln(x+1)\right)$$

$$=-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{\ln(x+1)}{4}$$

السؤال 3) د):

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{5}{24}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\frac{5}{24}-\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to0^+}x^4\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\frac{5}{24}-\frac{1}{4}\times(0)=\boxed{\frac{5}{24}}$$

$$\frac{1}{x+1}\le\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}x^4\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0\ ?$$

$$\frac{x^3}{x+1}\le x^4\ln(\ )\le x^3$$

كيف اكمل

لأنها [illegible]:

$$\lim_{x\to0^+}x^4(1+\frac{1}{x})\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{(1+\frac{1}{x})}\right)$$

$$\Leftarrow \lim_{0^+}x^4\ln(\ )=\lim_{0^+}\frac{x^3}{x+1}=\lim_{0^+}x^3=0$$

$$= \left(\lim_{x\to 0^+}(x^4+x^3)\right)\times\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}\right)$$

$$= 0\times 0 = 0$$

بما أن $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{5}{24}$ فإن $\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt = \frac{5}{24}$

يعني أن: $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{5}{24}$

السؤال 4) أ) -

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و $K\in[\![0;n-1]\!]$.

أولا $\left(\frac{2K+1}{2n}-\frac{2K}{2n}\right)=\frac{1}{2n}>0$ إذا: $\frac{2K+1}{2n}>\frac{K}{n}$

ليكن $t\in\left[\frac{K}{n};\frac{2K+1}{2n}\right] \Leftarrow \frac{K}{n}\leqslant t\leqslant\frac{2K+1}{2n}$

إذن

$$f\left(\frac{K}{n}\right)\leqslant f(t)\leqslant f\left(\frac{2K+1}{2n}\right) \Rightarrow \int_{\frac{K}{n}}^{\frac{2K+1}{2n}} f\left(\frac{K}{n}\right)dt\leqslant\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{2K+1}{2n}} f(t)\,dt\leqslant\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{2K+1}{2n}} f\left(\frac{2K+1}{2n}\right)dt$$

$F\left(\frac{K}{n}\right)$

$F = \int_x^1 f(t)$

$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$

$$\Rightarrow\left(\frac{2K+1}{2n}-\frac{2K}{2n}\right)f\left(\frac{K}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{K}{n}}^1 f(t)\,dt+\int_1^{\frac{2K+1}{2n}} f(t)\,dt\leqslant\left(\frac{2K+1}{2n}-\frac{K}{n}\right)f\left(\frac{2K+1}{2n}\right)$$

$-F\left(\frac{2K+1}{2n}\right)$ $\quad \frac{1}{2n}$ $\quad (-1)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n}f\left(\frac{2K+1}{2n}\right)\leqslant F\left(\frac{2K+1}{2n}\right)-F\left(\frac{K}{n}\right)\leqslant-\frac{1}{2n}f\left(\frac{K}{n}\right)$$

السؤال 4) ب):

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2K+1}{2n}\right)\leqslant F\left(\frac{2K+1}{2n}\right)-F\left(\frac{K}{n}\right)\leqslant-\frac{1}{2n}f\left(\frac{K}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\sum_{K=0}^{n-1}-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2K+1}{2n}\right)\leqslant\sum_{K=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2K+1}{2n}\right)-F\left(\frac{K}{n}\right)\right)\leqslant\sum_{K=0}^{n-1}-\frac{1}{2n}f\left(\frac{K}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\underline{-\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}f\left(\frac{2K+1}{2n}\right)}\leqslant V_n\leqslant-\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}f\left(\frac{K}{n}\right)\quad (1)$$

ولدينا $\frac{2K+1}{2n}<\frac{K+1}{n}\Rightarrow f\left(\frac{2K+1}{2n}\right)<f\left(\frac{K+1}{n}\right)\Rightarrow\sum_0^{n-1}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)<\sum_0^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}f\left(\frac{K+1}{n}\right)<\underline{-\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}f\left(\frac{2K+1}{2n}\right)}$$

نستنتج (2) $\quad\Rightarrow-\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}f\left(\frac{K+1}{n}\right)\leqslant V_n\leqslant-\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}f\left(\frac{K}{n}\right)$

$k'=k+1 \longrightarrow k=0\longrightarrow k'=1$

$k=n-1\longrightarrow k'=n$

بتعويض K' بـ $K+1$ في المسار نحصل على:

$$-\frac{1}{2n}\sum_{K=1}^{n} f\left(\frac{K'}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1} f\left(\frac{K}{n}\right) \checkmark$$

السؤال 4) ج):

لدينا الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{K=1}^{n} f\left(\frac{K}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1} f\left(\frac{K}{n}\right)$$

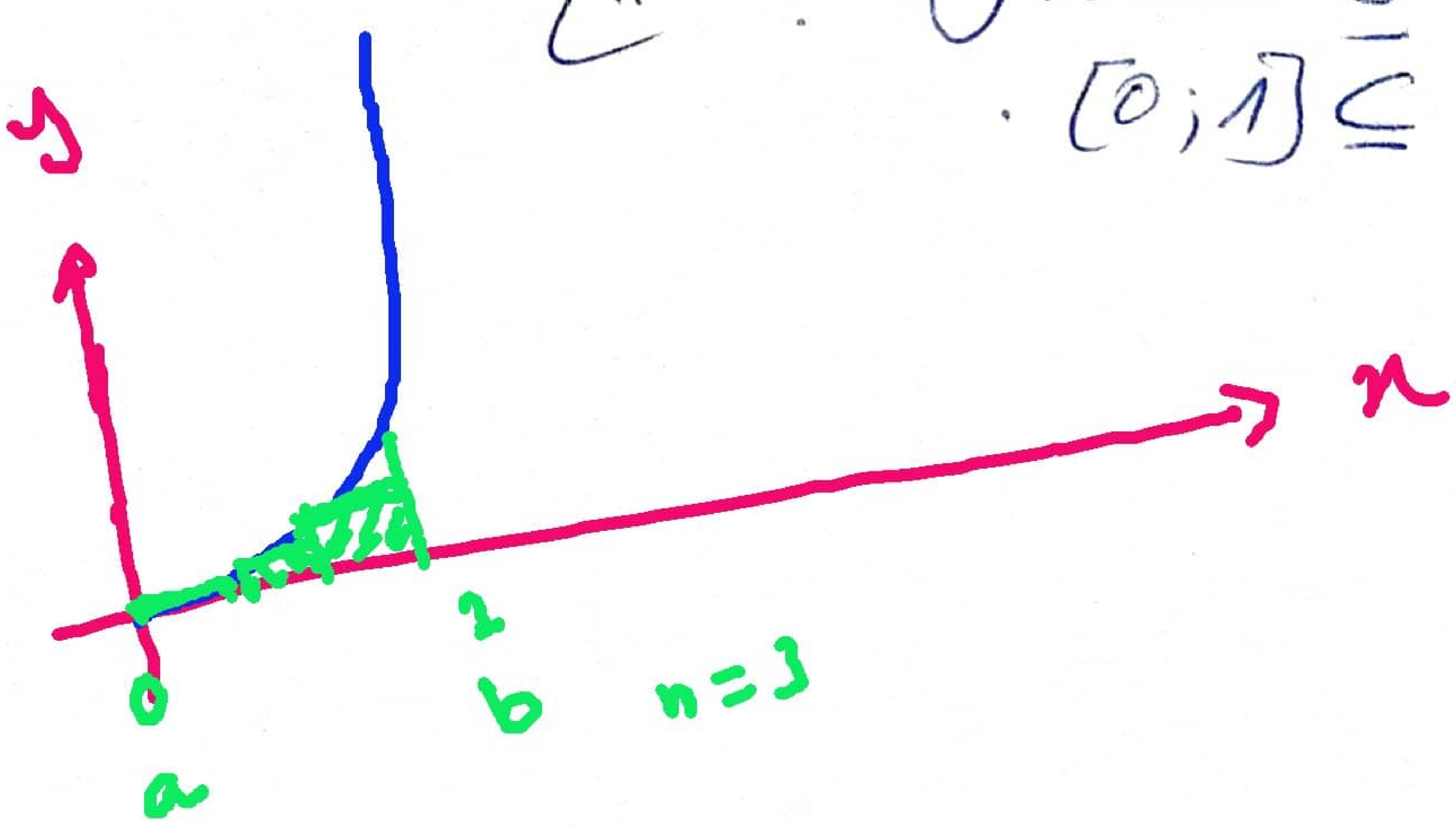
$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt}_{\text{مجموع Reimann}} \leq v_n \leq \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt}_{\text{مجموع Reimann}}.$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{24}\right) \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{24}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{5}{24}$$ لأن

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(v_n) = \frac{-5}{48}$$

لدي الحق في استعمال مجاميع Reimann لأن f متصلة في $[0;1] \subseteq [0,+\infty[$.



انتهى.