Corrigé d'exercice 1 (3.5 points)

1 (a) Soient $((x,y)\in\mathbb{R}^2)\,((a,b)\in\mathbb{R}^2)$, On a :

$$\begin{aligned}(a+bi)*(x+yi) &= ax+\left(a^2y+x^2b\right)i\\ &= xa+\left(x^2b+a^2y\right)i\\ &= (x+yi)*(a+bi)\end{aligned}$$

Donc la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{C}$.

(b) Soient $((x,y)\in\mathbb{R}^2)\,((a,b)\in\mathbb{R}^2)\,((z,t)\in\mathbb{R}^2)$, On a :

$$\begin{aligned}[(x+yi)*(a+bi)]*(z+ti) &= \left[xa+\left(x^2b+a^2y\right)i\right]*(z+ti)\\ &= xaz+\left[x^2a^2t+z^2\left(x^2b+a^2y\right)\right]i\\ &= xaz+\left(x^2a^2t+z^2x^2b+z^2a^2y\right)i\\ (x+yi)*[(a+bi)*(z+ti)] &= (x+yi)*\left[az+\left(a^2t+z^2b\right)i\right]\\ &= xaz+\left(x^2\left(a^2t+z^2b\right)+a^2z^2y\right)i\\ &= xaz+\left(x^2a^2t+x^2z^2b+a^2z^2y\right)i\end{aligned}$$

Alors $[(x+yi)*(a+bi)]*(z+ti)=(x+yi)*[(a+bi)*(z+ti)]$

D'où la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

(c) Soient $x,y,a,b\in\mathbb{R}$, $e=(a+bi)\in\mathbb{C}$ et $x\neq 0$

$$\begin{aligned}(x+yi)*e=x+yi &\Leftrightarrow xa+\left(x^2b+a^2y\right)i=x+yi\\ &\Leftrightarrow xa=x \quad ; \quad x^2b+a^2y=y\\ &\Leftrightarrow a=1 \quad ; \quad b=0\\ &\Leftrightarrow e=1\end{aligned}$$

Si $x=0$ On a $(0+yi)*(1+0i)=0\times 1+(0^2\times 0+1^2y)i=0+yi$

Or la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$, Alors $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+yi)*e=e*(x+yi)$

D'où $e=1$ est un élément neutre de la loi $*$.

(d) Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ On a :

$$\begin{aligned}(x+yi)*(a+bi)=e &\Leftrightarrow xa+\left(x^2b+a^2y\right)i=1\\ &\Leftrightarrow xa=1 \quad ; \quad x^2b+a^2y=0\\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{x} \quad ; \quad b=\frac{-a^2y}{x^2}\\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{x} \quad ; \quad b=\frac{-y}{x^4}\end{aligned}$$

Or la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$, Alors : $(x+yi)*(a+bi)=e \Leftrightarrow (a+bi)*(x+yi)=e$

Donc le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe comme symétrique pour la loi $*$.

2 (a) Soient $(a,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, $(b,y)\in\mathbb{R}^2$, $(z_1,z_2)\in E$ tels que $z_1=x+yi$, $z_2=a+bi$

On a : $z_1*z_2=(x+yi)*(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)\,i\in E$, car $xa\in\mathbb{R}_+^*$ et $x^2b+a^2y\in\mathbb{R}$.

Donc $z_1*z_2\in E$, d'où E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

(b) On a E est stable pour $*$ dans $\mathbb{C}$, donc d'après $1)a)b)c)d)$, la loi $*$ est :

(i) La loi $*$ est associative sur E,

(ii) La loi $*$ est commutative sur E,

(iii) La loi $*$ est admet un élément neutre $e = 1 \in E$,

(iv) $\forall(x;y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$: $x + yi$ admet un élément symétrique : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^4}i \in E$ car $(x > 0)$

De (i), (ii), (iii) et (iv) on constate que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

3 On a $G \neq \varnothing$ car $1 + 0i = 1 \in G$, et $G \subset E$ car $1 > 0$

Soient $(b, y) \in \mathbb{R}^2$, $(z_3, z_4) \in G$ tels que $z_3 = 1 + yi$, $z_4 = 1 + bi$

On a : $z_3 * z_4 = (1 + yi) * (1 + bi) = 1 + (b + y)i \in G$, car $b + y \in \mathbb{R}$

Donc G est un sous-groupe de $(E, *)$.

4 **a** On a $F \in M_2(\mathbb{R})$. Soient $(x, a) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $(y, b) \in \mathbb{R}^2$.

Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in F$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in F$

On a : $A \times B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}$

Comme $x, a \in \mathbb{R}_+^*$, alors $xa \in \mathbb{R}_+^*$, or $xb + ya \in \mathbb{R}$, alors $A \times B \in F$

D'où F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

b Soit φ l'application de E vers F définie par $\varphi(x + yi) = M_2(x^2, y) = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$

Soient $z_1, z_2 \in E$ tels que $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$, $x, a \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(z_1 * z_2) = \varphi\left(xa + (x^2b + a^2y)i\right) = M_2\left(x^2a^2, x^2b + a^2y\right)$$

$$\varphi(z_1) \times \varphi(z_2) = M_2(x^2, y) \times M_2(a^2, b) = \begin{pmatrix} x^2y^2 & x^2b + a^2y \\ 0 & x^2y^2 \end{pmatrix} = M_2\left(x^2a^2, x^2b + a^2y\right)$$

Donc $\varphi(z_1 * z_2) = \varphi(z_1) \times \varphi(z_2)$

D'où φ est un morphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

Soit $M(a, b) \in F$ et $z \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = M(a, b) &\Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a, b) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow x^2 = a \;;\; y = b \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{a} \;;\; y = b \\
&\Leftrightarrow z = \sqrt{a} + bi.
\end{aligned}$$

D'ou φ est bijective de E vers F.

Alors φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

c Puisque φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$ et $(E, *)$ est un groupe commutatif.

Alors $(F, \times)$ est un groupe commutatif.

Corrigé d'exercice 2 (3.5 points)

Soit m un nombre complexe non réel $(m \in \mathbb{C} - \mathbb{R})$.

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

1 (a) On a :

$$\begin{aligned}
\Delta &= ((1+i)(1+m))^2 - 4 \times 2im \\
&= 2i\left(1 + 2m + m^2\right) - 8im \\
&= 2i + 4im + 2im^2 - 8im \\
&= 2i - 4im + 2im^2 \\
&= 2i(m-1)^2 \\
&= [(1+i)(m-1)]^2
\end{aligned}$$

Puisque $m \notin \mathbb{R}$, alors $m \neq 1$, donc $\Delta \neq 0$.

(b) On a : $\sqrt{\Delta} = (1+i)(m-1)$, alors :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{(1+i)(1+m) + (1+i)(m-1)}{2}; & z_2 &= \frac{(1+i)(1+m) - (1+i)(m-1)}{2} \\
&= \frac{2m(1+i)}{2}; & &= \frac{2(1+i)}{2} \\
&= m(1+i); & &= 1+i
\end{aligned}$$

2 On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

(a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$.

Puisque $0 < \theta < \pi$, alors $0 < \dfrac{\theta}{2} < \pi$, donc :

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (1+i)(1 + \cos\theta + i\sin\theta) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{1+\cos\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} + i\frac{\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\theta}{2}} \\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

D'où $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\arg(z_1+z_2) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}$

(b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$.

On a : $z_1 z_2 = m(1+i)(1+i) = 2im$.

Si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$, alors $m = e^{i\theta} \in i\mathbb{R}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, alors $m = i$

D'où $z_1 + z_2 = m(1+i) + (1+i) = (1+m)(1+i) = (1+i)(1+i) = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(0;\overline{u},\overline{v})$.
On considère les points suivants : A le point d'affixe $a=1+i$, B le point d'affixe $b=(1+i)m$, C le point d'affixe $c=1-i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

1 **a** Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega=\dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$.

Puisque D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, alors

$$z_D=e^{i\frac{\pi}{2}}z_B=i(1+i)m$$

On a Ω le milieu du segment $[CD]$, alors $z_\Omega=\dfrac{z_D+z_C}{2}$, donc

$$\omega=\frac{im(1+i)+1-i}{2}=\frac{-m(1-i)+(1-i)}{2}=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

b Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$.

$$\frac{b-a}{\omega}=\frac{(1+i)\,m-(1+i)}{\frac{(1-i)(1-m)}{2}}=\frac{2\,(1+i)\,(m-1)}{(1-i)\,(1-m)}=\frac{2\,(1+i)}{(i-1)}=-2i$$

c En déduire que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB=2O\Omega$.

On a : $\dfrac{b-a}{\omega}=\dfrac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O}=-2i$

Donc $\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O}\right|=2$

D'où $(O\Omega)\perp(AB)$ et $AB=2O\Omega$

2 La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h.

a Puisque $H\in(AB)$, alors les points H,A et B sont alignés, donc $\arg\left(\dfrac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, d'où $\dfrac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$

Puisque $(O\Omega)\perp(AB)$ et $H\in(O\Omega)$, alors $(OH)\perp(AB)$, donc $\arg\left(\dfrac{z_H-z_O}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, d'où $\dfrac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}$

b En déduire h en fonction de m.

Puisque $\dfrac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$ et $\dfrac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}$ alors $\exists(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2$ tels que : $\dfrac{h}{b-a}=x$ et $\dfrac{h-a}{b-a}=iy$.
On a :

$$\begin{aligned}\frac{h-a}{b-a}=x &\Leftrightarrow \frac{h}{b-a}-\frac{a}{b-a}=x\\ &\Leftrightarrow iy-\frac{1}{m-1}=x\\ &\Leftrightarrow -x+iy=\frac{1}{m-1} \qquad (1)\\ &\Leftrightarrow \overline{-x+iy}=\overline{\frac{1}{m-1}}\\ &\Leftrightarrow -x-iy=\frac{1}{\overline{m}-1} \qquad (2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1)+(2) \Leftrightarrow -2x &= \frac{1}{m-1}+\frac{1}{\overline{m}-1}\\
\Leftrightarrow x &= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{\overline{m}-1}\right)\\
\Leftrightarrow h &= x\,(b-a)+a\\
\Leftrightarrow h &= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{\overline{m}-1}\right)(1+i)\,(m-1)+1+i\\
\Leftrightarrow h &= \frac{-1}{2}\left(\frac{m+\overline{m}-2}{\overline{m}-1}\right)(1+i)+(1+i)\\
\Leftrightarrow h &= (1+i)\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{m+\overline{m}-2}{\overline{m}-1}\right)+1\right)\\
\Leftrightarrow h &= (1+i)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-m-\overline{m}+2+2\overline{m}-2}{\overline{m}-1}\right)\right)\\
\Leftrightarrow h &= \frac{(1+i)}{2}\left(\frac{\overline{m}-m}{\overline{m}-1}\right)
\end{aligned}
$$

Corrigé d'exercice 3 (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.
Soit n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

1 On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n.

a Comme 2969 ne divise pas n, alors $n \wedge 2969 = 1$, donc d'après le théorème de BEZOUT :

$$\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \quad ; \quad u \times n + v \times 2969 = 1$$

$$\Rightarrow \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \quad ; \quad u \times n - 1 = v \times 2969 \Rightarrow 2969 \text{ divise } u \times n - 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \quad ; \quad u \times n \equiv 1[2969]}$$

b D'après $(1-a)$ on a : $u \times n \equiv 1[2969] \Rightarrow (u \times n)^8 \equiv 1^8[2969] \Rightarrow (u \times n)^8 \equiv 1[2969]$.
On a : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

$$\Rightarrow (u \times n)^8 + (u \times m)^8 \equiv 0[2969] \Rightarrow (u \times m)^8 \equiv -(u \times n)^8[2969]$$

$$\boxed{\Rightarrow (u \times m)^8 \equiv -1[2969]}$$

$$\Rightarrow (u \times m)^{8\times 371} \equiv (-1)^{371}[2969]$$

$$\boxed{\Rightarrow (u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]}$$

c On suppose que 2969 divise $u \times m$, alors $u \times m \equiv 0[2969]$, alors

$$\boxed{(u \times m)^8 \equiv 0[2969].}$$

Ce qui est absurde car $(u \times m)^8 \equiv -1[2969]$. Donc

$$\boxed{2969 \text{ ne divise pas } u \times m.}$$

d Comme 2969 est un nombre premier et $u \times m \wedge 2969 = 1$ alors, d'après le Théorème de Fermat $(u \times m)^{2969-1} \equiv 1[2969]$, alors

$$\boxed{(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969].}$$

2 **a** Si 2969 ne divise pas n, on a :
D'après $(1-b)$: $(u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$.
D'après $(1-d)$: $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$.
Donc $0 \equiv -2[2969] \Rightarrow 2 \equiv 0[2969] \Rightarrow 2969$ divise 2.
Ce qui est absurde, donc

$$\boxed{2969 \text{ divise } n.}$$

b On a 2969 divise n, alors $n \equiv 0[2969] \Rightarrow n^8 \equiv 0[2969]$.
$(\Rightarrow)$ Si : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$, alors $m^8 \equiv -n^8[2969] \equiv 0[2969]$,
alors $m \equiv 0[2969]$, car 2969 est un nombre premier.
$(\Leftarrow)$ Si : $n \equiv 0[2969]$ et $m \equiv 0[2969]$, alors $n^8 \equiv 0[2969]$ et $m^8 \equiv 0[2969]$,
alors $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$. Finalement

$$\boxed{n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \quad \Leftrightarrow n \equiv 0[2969] \quad \text{et} \quad m \equiv 0[2969]}$$

Corrigé d'exercice 4 (10 points)

PARTIE I : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x\left(e^{-x} + \dfrac{1}{2}x - 1\right)$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} 4x^2\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)\\
&= +\infty\left(-\infty + \frac{1}{2} - 0\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

Et on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} 4x^2\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)\\
&= +\infty\left(0 + \frac{1}{2} - 0\right)\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2 **a** Puisque les fonction $x \mapsto 4x$, $x \mapsto e^{-x}$, et $x \mapsto \dfrac{1}{2}x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right) + 4x\left(-e^{-x} + \frac{1}{2}\right)\\
&= 4e^{-x} + 2x - 4 - 4xe^{-x} + 2x\\
&= 4e^{-x} - 4xe^{-x} + 4x - 4\\
&= 4e^{-x}(1-x) - 4(1-x)\\
&= 4(1-x)\left(e^{-x} - 1\right)
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{f'(x) = 4(1-x)\left(e^{-x} - 1\right)}$

b Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Si $x \leq 0$, alors $e^{-x} - 1 \geq 0$ et $1 - x \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$, d'où $\boxed{f \text{ est croissante sur }]-\infty; 0]}$

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $e^{-x} - 1 \leq 0$ et $1 - x \geq 0$ donc $f'(x) \leq 0$, d'où $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0; 1]}$

Si $x \leq 0$, alors $e^{-x} - 1 \leq 0$ et $1 - x \leq 0$ donc $\boxed{f'(x) \geq 0, \text{ d'où } f \text{ est croissante sur } [1; +\infty[}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$4e^{-1}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

c Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2},2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$.

(On prendra $e^{\frac{3}{2}}=4,5$). On a :

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=4\times\frac{3}{2}\left(e^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-1\right)\approx 6\,(0,22+0,75-1)=-0,16$$
$$f\,(2)=4\times 2\left(e^{-2}+\frac{1}{2}\times 2-1\right)\approx 8\,(0,71+1-1)\approx 4,30$$

Donc $f\left(\frac{3}{2}\right)\times f\,(2)<0$, et puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]\frac{3}{2},2\right[$,

Alors d'après TVI, $\boxed{\exists\alpha\in\left]\frac{3}{2},2\right[\text{ tel que } f(\alpha)=0.}$

d Vérifier que : $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\Leftrightarrow 4\alpha\left(e^{-\alpha}+\frac{1}{2}\alpha-1\right)=0\\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha}+\frac{1}{2}\alpha-1=0 \quad \text{car } \alpha\neq 0\\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}}$

3 **a** En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f', montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f''\,(x_0)=0$

On a la fonction $x\mapsto e^{-x}-1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $x\mapsto e^{-x}-1$ est continue $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

On a la fonction $x\mapsto 1-x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $x\mapsto 1-x$ est continue $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

Donc la fonction f' est continue $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. (produit de deux fonctions).

On a : $f'\,(0)=4\,(e^0-1)\,(1-0)=0$ et $f'\,(1)=4\,(e^1-1)\,(1-1)=0$

Donc $f'(0)=f'(1)$

D'où d'après théorème de Rolle $\boxed{(\exists x_0\in]0,1[)\text{ tel que : } f''(x_0)=0}$

b En appliquant le théorème des accroissements finis a la fonction f'' , montrer que, pour tout réel x différent de x_0 de l'intervalle $[0,1]$, on a : $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

Puisque f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} f''(x)&=-4e^{-x}(1-x)-4\left(e^{-x}-1\right)\\ &=-4e^{-x}+4xe^{-x}-4e^{-x}+4\\ &=4xe^{-x}-8e^{-x}+4\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 4xe^{-x} - 8e^{-x} + 4 \\ &= 4e^{-x} - 4xe^{-x} + 8e^{-x} \\ &= 4e^{-x}(3-x) \end{aligned}$$

Soit $x \in [0,1]$ avec $x \leq x_0$ et $x < x_0$

On a la fonction f'' est continue sur $[x, x_0]$ et dérivable sur $]x, x_0[$

Donc d'après théorème des accroissements finie $\exists c \in]x, x_0[$ tel que

$$f''(x) - f''(x_0) = (x - x_0) f'''(C)$$

Puisque $f''(x_0) = 0$, alors

$$f''(x) = (x - x_0) f'''(c) \Leftrightarrow f'''(c) = \frac{f''(x)}{x - x_0}$$

On a : $f'''(c) = 4e^{-c}(3-c)$, alors

$$\begin{aligned} x < c < x_0 &\Leftrightarrow 0 < c < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < -c < 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-1} < e^{-c} < 1 \\ &\Leftrightarrow 4e^{-1} < 4e^{-c} < 4 \\ &\Leftrightarrow 2 < 3 - c < 3 \\ &\Leftrightarrow 8e^{-1} < 4e^{-c}(3-c) < 12 \\ &\Rightarrow 0 < f'''(c) \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{f''(x)}{x - x_0} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(\forall x \in [0,1], x \neq x_0) \quad ; \quad 0 < \frac{f''(x)}{x - x_0}}$

c En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

On a : $0 < \dfrac{f''(x)}{x - x_0}$, alors :

- Si $x > x_0$, alors $x - x_0 > 0$, donc $f''(x) > 0$.
- Si $x < x_0$, alors $x - x_0 < 0$, donc $f''(x) < 0$.

Donc $f''(x)$ change de signe au voisinage de x_0.

Puisque $f''(x_0) = 0$ alors $\boxed{I(x_0, f(x_0)) \text{ est un point d'inflexion de la courbe } (C)}$

4 a Étudier les branches infinies de la courbe (C).

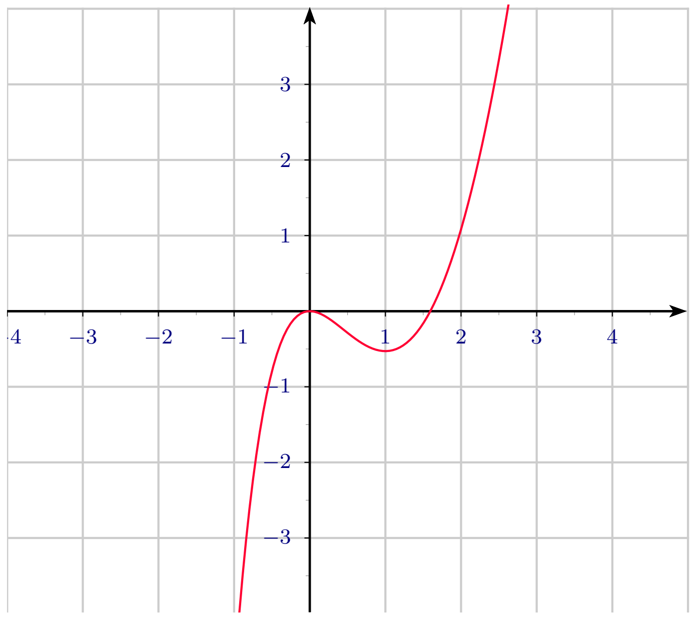
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique dont direction est celle de l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique dont direction est celle de l'axe (Oy) au voisinage de $-\infty$.

b Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$



5 **a** Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty, \alpha])\quad ; \quad f(x) \leq 0$

On a : $(\forall x \in]-\infty, \alpha]) \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \alpha \quad$ ou $\quad x \leq 0$

- Si $x \leq 0$, alors $f(x) \leq f(0) = 0$ car f est croissante sur $\mathbb{R}_-$, d'où $f(x) \leq 0$.
- Si $0 \leq x \leq \alpha$, alors $0 \leq x \leq 1$ ou $1 \leq x \leq \alpha$
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(0) = 0 \geq f(x) \geq f(1)$ car f est décroissante sur $[0;1]$, d'où $f(x) \leq 0$.
- Si $1 \leq x \leq \alpha$, alors $f(1) \leq f(x) \leq f(\alpha) = 0$ car f est croissante sur $[1;\alpha]$, d'où $f(x) \leq 0$.

Finalement $\boxed{(\forall x \in]-\infty, \alpha])\quad ; \quad f(x) \leq 0}$

b Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2 - 3\right)$, en déduire que : $\dfrac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha} f(x)dx &= \int_0^{\alpha} 4xe^{-x} + 2x^2 - 4x dx \\
&= \left[-4xe^{-x} + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} 4e^{-x}dx \\
&= \left[-4xe^{-x} + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 4e^{-x}\right]_0^{\alpha} \\
&= -4\alpha e^{-\alpha} + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4e^{-\alpha} + 4 \\
&= -4\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + 4 \\
&= -4\alpha + 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4 + 2\alpha + 4 \\
&= \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha \\
&= \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2 - 3\right)
\end{aligned}$$

On a $(\forall x \in]-\infty, \alpha])\quad ; \quad f(x) \leq 0$, alors $(\forall x \in]0, \alpha])\quad ; \quad f(x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha f(x)dx \leq \int_0^\alpha 0dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-3 \leq 0 \text{ car } 0<\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 \leq 3$$
$$\Leftrightarrow \alpha \leq \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$$

D'où $\boxed{\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}}$

c Calculer en fonction de α, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y=0, x=0$ et $x=\alpha$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\alpha |f(x)|dx \\ &= \int_0^\alpha -f(x)dx \quad (\text{ car } \forall x \in [0;\alpha] : f(x)<0) \\ &= -\frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{A=-\frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right) cm^2}$

PARTE II : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0<\alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1}=f\left(u_n\right)+u_n$$

1 **a** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n<\alpha$

- Pour $n=1$, on a $u_0<\alpha$
- Supposons que $u_n<\alpha$ et montrons que $u_{n+1}<\alpha$. On a

$$\begin{aligned} u_n<0 &\Leftrightarrow f\left(u_n\right)<0 \quad \text{ d'après } I)5)a) \\ &\Leftrightarrow u_{n+1}<0 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1}<0<\alpha \\ &\Leftrightarrow u_{n+1}<\alpha \end{aligned}$$

- Finalement $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n<\alpha}$

b En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
On a : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$, et $(\forall x<\alpha)$: $f(x)<0$
Puisque $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n<\alpha$, alors $f(u_n)<0$, donc $u_{n+1}-u_n<0$
D'où $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

2 On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ; \quad g(x)>0 \quad$ (On prendra : $\ln 2=0.69$)

On a la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} g'(x)=0 &\Leftrightarrow -e^{-x}+\frac{1}{2}=0 \\ &\Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow e^{x}=2 \\ &\Leftrightarrow x=\ln 2 \end{aligned}$$

Si $x \leq \ln 2$, alors $-e^{-x}+\dfrac{1}{2} \leq 0$, donc $g'(x) \leq 0$. D'où g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Si $x \geq \ln 2$, alors $-e^{-x}+\dfrac{1}{2} \geq 0$, donc $g'(x) \geq 0$. D'où g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors

$$g(x) \geq \min_{x\in\mathbb{R}}(g(x)) = g(\ln 2) = \frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{4} \approx 0.5+0.34-0.75 = 0.09 > 0$$

D'où $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ; \quad g(x) > 0}$

b En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n$

- Pour $n=0$, on a : $0 \leq u_0$
- Supposons que $0 \leq u_n$, et montrons que $0 \leq u_{n+1}$
  Si $u_n = 0$ c'est évidente, alors on suppose que $u_n \neq 0$
  On a : $f(u_n)+u_n = 4u_n g(u_n)$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}+u_n}{4u_n} = g(u_n) > 0$$
$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}+u_n}{4u_n} > 0$$
$$\Rightarrow u_{n+1}+u_n > 0 \quad \text{car} \quad u_n > 0$$
$$\Rightarrow u_{n+1} > 0 \quad \text{car} \quad u_n > 0$$

- Finalement $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n}$

c Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante alors $\boxed{\text{elle est convergente.}}$

d Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)+x$, donc $h(x) = 4xg(x)$, et $u_{n+1} = h(u_n)$, et $0 \leq u_n < \alpha$.

On a la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $[0,\alpha[$.

On a $\forall x \in [0,\alpha[$, $g(x) > 0$, donc $4xg(x) > 0$, alors $h(x) > 0$

Puisque $\forall x \in [0,\alpha[$, $h(x) = f(x)+x$, et $f(x) \leq 0$, alors $f(x)+x \leq \alpha$, d'où $h(x) \leq \alpha$.

Alors $\forall x \in [0,\alpha[$, $h(x) \in [0,\alpha[$, donc $h([0,\alpha[) \subset [0,\alpha[$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $h(\ell) = \ell$, avec $\ell \in [0,\alpha[$.

On a $h(\ell) = \ell \Leftrightarrow f(\ell)+\ell = \ell \Leftrightarrow f(\ell) = 0 \Leftrightarrow (\ell = 0 \ \ ou \ \ \ell = \alpha)$.

Puisque $\alpha \notin [0,\alpha[$, alors $\ell = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3 On suppose que $u_0 < 0$

a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1}-u_n \leq f(u_0)$

On a $u_{n+1}-u_n = f(u_n)$.

Et On a : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n \leq u_0$.

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad f(u_n) \leq f(u_0)$, car f est croissante sur $]-\infty, 0]$

D'où $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1}-u_n \leq f(u_0)}$

b Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

On a

$$\oplus \begin{cases} u_1-u_0 \leq f(u_0) \\ u_2-u_1 \leq f(u_0) \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ u_n-u_{n-1} \leq f(u_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) \leq \underbrace{f(u_0) + f(u_0) + \ldots + f(u_0)}_{n\,fois}$$

$$\Rightarrow u_n - u_0 \leq nf(u_0)$$

D'où $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n \leq u_0 + nf(u_0)}$

(c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a $(\forall n \in \mathbb{N})$, et $f(u_0) < 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} (u_0 + nf(u_0)) = \lim_{n\to+\infty} nf(u_0) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \leq -\infty$$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

Fin