امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان

D135463877

النقطة النهائية: 20 على 20

المادة: الرياضيات

الشعبة أو المسلك: .... المستوى: ....

التقدير المفسر للنقطة: ....

اسم المصحح: .... التوقيع: ....

التمرين الأول:

1. لدينا $E \subset M_3(\mathbb{R})$ و $(M_3(\mathbb{R}),+)$ زمرة. لأن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة.

ولدينا $M(0,0) \in E$ ومنه $E \neq \emptyset$.

ليكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E.

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -(a-c) & a-c \end{pmatrix}$$

$$= M(a-c, b-d) \in E \quad \left((a-c, b-d) \in \mathbb{R}^2\right)$$

ومنه من ① و ② فـ

E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$.

2.

ليكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E

$$M(a,b)\ T\ M(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

ولدينا

$$\begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

و

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc & -ad-bc \\ 0 & 0 & 0 \\ bc+ad & bd-ac & -bd+ac \end{pmatrix}$$

$$= M(ac-bd, ad+bc)$$

ومنه $M(a,b)\ T\ M(c,d) = M(ac-bd, ad+bc) \in E$

لأن $(ac-bd, ad+bc) \in \mathbb{R}^2$

ومنه T قانون تركيب داخلي في E. ولدينا T قانون تركيب داخلي في $M_3(\mathbb{R})$

ولدينا $E \subset M_3(\mathbb{R})$

ومنه E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),T)$

امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان

النقطة النهائية

على ....

المادة : ....

الشعبة أو المسلك :.......... المستوى :..........

التقدير المفسر للنقطة :

اسم المصحح :.......... التوقيع:..........

3 - ليكن $z=a+ib$ و $z'=c+id$ عنصرين من $\mathbb{C}^*$

لدينا $\varphi(zz') = \varphi((a+ib)(c+id)) = \varphi(ac-bd+i(ad+bc))$

$= M(ac-bd, ad+bc)$

$= M(a,b) \top M(c,d)$

$= \varphi(a+ib) \top \varphi(c+id)$

$= \varphi(z) \top \varphi(z')$

ومنه $\varphi(z\times z') = \varphi(z) \top \varphi(z')$

ومنه φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\top)$.

لنبين أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ ؟

ليكن $N\in E^*$ ومنه حسب تعريف E^*

$\exists (a,b)\neq(0,0) \quad N = M(a,b)$

إذن $\exists (a,b)\neq(0,0) \quad N=\varphi(a+ib)$

ومنه $\exists z\in\mathbb{C}^* \quad N=\varphi(z)$

ومنه $E^*\subset\varphi(\mathbb{C}^*)$

ليكن $M\in\varphi(\mathbb{C}^*)$ ومنه $\exists z\in\mathbb{C}^* \quad \varphi(z)=M$.

إذن $\exists(a,b)\neq(0,0) \quad \varphi(a+ib)=M$.

ومنه $\exists (a,b)\neq(0,0) \quad M(a,b)=M$.

ومنه $M\in E^*$

إذن $\varphi(\mathbb{C}^*)\subset E^*$

إذن خلاصة $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

ب)

لدينا φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\top)$.

ولدينا $(\mathbb{C}^*,\times)$ عبارة عن زمرة تبادلية لأن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي

ومنه فلكون $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ فإن $(E^*,\top)$ زمرة تبادلية.

ولدينا 1 عنصر محايد في $(\mathbb{C}^*,\times)$

ومنه $\varphi(1+i0)=M(1,0)$ عنصر محايد في $(\varphi(\mathbb{C}^*),\top)$

إذن في $(E^*,\top)$

ومنه $(E^*,\top)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $J=M(1,0)$

$J = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

4 - أ - لدينا $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ من E

لدينا

$M(a,b)\ T\ (M(c,d) + M(e,f))$
$= M(a,b) \times A \times (M(c,d) + M(e,f))$
$= M(a,b) \times A \times M(c,d) + M(a,b) \times A \times M(e,f)$ ولكون $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة
$= M(a,b)\ T\ M(c,d) + M(a,b)\ T\ M(e,f)$

ومنه ف

$\forall M(a,b), M(c,d), M(e,f) \in E:$

$M(a,b)\ T\ (M(c,d) + M(e,f)) = M(a,b)\ T\ M(c,d) + M(a,b)\ T\ M(e,f)$

ولدينا أيضا $(M(c,d) + M(e,f))\ T\ M(a,b) = M(c,d) + M(e,f) \times A \times M(a,b)$
$= M(c,d) \times A \times M(a,b) + M(e,f) \times A \times M(a,b)$
$= M(c,d)\ T\ M(a,b) + M(e,f)\ T\ M(a,b)$

ومنه من ① و ② ف T توزيعي بالنسبة القانون $+$ في E

4 - ب - لدينا E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$ ولدينا $(M_3(\mathbb{R}),+)$ زمرة و في أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة: ومنه $(E,+)$ زمرة تبادلية

ولدينا أيضا (E^*,T) زمرة تبادلية

وأيضا لدينا T توزيعي بالنسبة لـ "$+$" في E

ومنه فإن $(E,+,T)$ جسم تبادلي

التمرين الثاني :

1 - لدينا مميز المعادلة

$\Delta = (2(m+1+i))^2 - 4 \times 2 \times (m^2 + (1+i)m + i)$
$= 4(m^2 + 1 - 1 + 2m + 2i + 2im - 2m^2 - 2m - 2im - 2i)$
$= 4(-m^2) = 2^2(im)^2 = (2im)^2$

ومنه $\Delta = (2im)^2$

2 - لنحل المعادلة E:

لدينا حلول المعادلة هي :

$z_1 = \frac{2m+2+2i-2im}{4}$ أو $z_2 = \frac{2m+2+2i+2im}{4}$

$z_1 = \frac{m+1+i-im}{2}$ أو $z_2 = \frac{m+1+i+im}{2}$

$z_1 = \frac{m+i-i(m+i)}{2}$ أو $z_2 = \frac{m+1+i(m+1)}{2}$

$z_1 = \frac{(m+i)(1-i)}{2}$ أو $z_2 = \frac{(m+1)(1+i)}{2}$

ومنه $S = \left\{ \frac{(m+i)(1-i)}{2}, \frac{(m+1)(1+i)}{2} \right\}$

0.5

0.5

0.5

0.5

الجزء الثاني :

1-أ -

$$iz_2 + 1 = \frac{i(1-i)}{2} \times (m+i) + 1$$

$$= \frac{(i+1)(m+i) + 2}{2}$$

$$= \frac{im - 1 + m + i + 2}{2}$$

$$= \frac{im + 1 + m + i}{2}$$

$$= \frac{i(m+1) + (1+m)}{2}$$ 0,75

$$= \frac{(m+1)(1+i)}{2} = z_1$$

ومنه $\boxed{z_1 = iz_2 + 1}$

ب.

لنبين أن M_1 صورة M_2 بالدوران $R(\Omega, \frac{\pi}{2})$ لتكن صورة $N(n)$

$$n = e^{i\pi/2}(z_2 - \omega) + \omega$$

$$= i\left(z_2 - \frac{1+i}{2}\right) + \frac{1+i}{2}$$

$$= iz_2 - \frac{i-1}{2} + \frac{1+i}{2}$$ 0,5

$$= iz_2 + \frac{1+i-i+1}{2}$$

$$n = iz_2 + 1 = z_1$$

ومنه $N = M_1$ إذا M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{1+i}{2}\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

2-أ- لنبين أن :

$$\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\,\frac{m-1}{m-i}$$

لدينا

$$z_2 - m = \frac{(1-i)}{2}(m+i) - m$$

$$= \frac{m + i - im + 1 - 2m}{2}$$

$$= \frac{1 - m + i - im}{2} = \frac{(1-m) + i(1-m)}{2}$$

$$= \frac{(1+i)(1-m)}{2}$$

النقطة النهائية

على ......

المـادة : ......

الشعبة أو المسلك : ...... المستوى : ......

التقدير المفسر للنقطة : ......

اسم المصحح : ...... التوقيع: ......

ولدينا $z_1 - m = \frac{1+i}{2}(m+1) - m$

$= \frac{(1+i)(m+1)-2m}{2}$

$= \frac{1+m+im+i-2m}{2}$

$= \frac{1-m+im+i}{2} = \frac{-i(i-im-m-1)}{2}$

$= \frac{-i\left((i-m)+i(i-m)\right)}{2}$

$= \frac{-i(i-m)(1+i)}{2}$

ومنه $\frac{z_2-m}{z_1-m} = \frac{(1+i)(1-m)}{-i(1+i)(i-m)} = i\,\frac{1-m}{i-m}$

$$\boxed{\frac{z_2-m}{z_1-m} = i\,\frac{m-1}{m-i}}$$

ب. نفترض أن M و M_2 و M_1 نقط مستقيمية

ومنه $\frac{z_2-m}{z_1-m} \in \mathbb{R}$

وبما أن $\frac{z_2-m}{z_1-m} = i\,\frac{m-1}{m-i}$

فإن $\frac{m-1}{m-i} \in i\mathbb{R}$

2/5

~~لدينا~~ ولدينا $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}) \equiv \arg\left(\frac{1-m}{i-m}\right)[\pi]$

$(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ (لأن $\frac{m-1}{m-i} \in i\mathbb{R}$)

ومنه فإن $(MA)\perp(MB)$ وبالتالي M تنتمي إلى الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$

امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان

النقطة النهائية

على ....

المادة : ....

الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : .... التوقيع: ....

ج- لدينا M_1 صورة M_2 بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\pi/2$.

ومنه $(M_1\Omega) \perp (M_2\Omega)$.

أي $M_1\hat{\Omega}M_2 = \pi/2$

~~نعلم~~ تكون M_2 و M_1 و Ω و M نقط متداورة ~~...~~ إذا وفقط إذا:

$M_1\hat{M}M_2 = M_1\hat{\Omega}M_2$ أو $M_1\hat{\Omega}M_2 + M_1\hat{M}M_2 = \pi$

أي $M_1\hat{M}M_2 = \pi/2$ أو $M_1\hat{M}M_2 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

يكافئ أي

$$M_1\hat{M}M_2 = \pi/2$$

ومنه بالتالي $(M_2M) \perp (M_1M)$.

أي $\frac{z_2-m}{z_1-m} \in i\mathbb{R}$.

ولدينا $\frac{z_2-m}{z_1-m} = i \times \frac{m-1}{m-i}$

ومنه ف $\frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$.

ولدينا $\frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{m-1}{m-i}\right)} = \frac{m-1}{m-i}$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{m}-1}{\bar{m}+i} = \frac{m-1}{m-i}$

$\Leftrightarrow (\bar{m}-1)(m-i) = (m-1)(\bar{m}+i)$

$\Leftrightarrow \cancel{m\bar{m}} - i\bar{m} - m + i = \cancel{m\bar{m}} + im - \bar{m} - i$.

$\Leftrightarrow -i\bar{m} - m + i - im + \bar{m} + i = 0$.

$\Leftrightarrow -i(\bar{m}+m) + \bar{m} - m + 2i = 0$.

$\Leftrightarrow -i \times 2Re(m) - 2i\,Im(m) + 2i = 0$.

$\Leftrightarrow -2i\,Re(m) - 2i\,Im(m) + 2i = 0$.

$\Leftrightarrow Re(m) + Im(m) - 1 = 0$.

ومنه M تنتمي المستقيم ذو المعادلة الديكارتية $x+y-1=0$

معروفة ب $A(1)$ و $B(i)$. ~~$x+y-R=0$~~

0,75

ومنه النقط Ω و M و M_1 و M_2 نقط متداورة إذا وفقط إذا كان M ينتمي للمستقيم ذي المعادلة الديكارتية $y=1-x$ محروماً من $A(1)$ و $B(i)$

التمرين الثالث:

1) أ- نفترض جدلاً أن $p \geq 2017$.

وبما $x \geq 1$ ومنه $px \geq 2017$.

وبما أن $y \geq 1$ ومنه $y^{p-1} \geq 1$.

إذن $px + y^{p-1} \geq 2018$. 0,25

ومنه لدينا $px + y^{p-1} = 2017$.

إذن $2017 \geq 2018$.

وهذا تناقض ومنه $p < 2017$

ب- نفترض جدلاً أن p يقسم y.

ومنه $y \equiv 0[p]$

إذن $y^{p-1} \equiv 0[p]$

وبما $px \equiv 0[p]$

ومنه $px + y^{p-1} \equiv 0[p]$ 0,5

أي $2017 \equiv 0[p]$

إذن $p|2017$ وبما p أولي أكبر من أو يساوي 5

و 2017 عدد أولي ومنه هذا تناقض.

إذن p لا يقسم y.

ج- بما p عدد أولي ومنه حسب مبرهنة فيرما $y^p \equiv y[p]$.

وبما p لا يقسم y و p عدد أولي

ومنه $p \wedge y = 1$

إذن نتحصل على: $y^{p-1} \equiv 1[p]$.

وبما $px \equiv 0[p]$.

ومنه $px + y^{p-1} \equiv 1[p]$ 0,75

إذن لدينا $px + y^{p-1} = 2017$ فـ $2016 \equiv 0[p]$.

ومنه $p|2016$.

د- بما $p|2016$ ومنه $p|2^5 \times 3^2 \times 7$ وبما p و 7 و 3 و 2 أعداد أولية.

ومنه $p=2$ أو $p=3$ أو $p=7$ وبما $p \geq 5$

ومنه $p=7$ 0,5

2 - مما سبق لدينا

$$\left(\exists (x,y)\in \mathbb{N}^{*2} \quad px + y^{p-1} = 2017\right) \Longrightarrow p=7.$$

ومنه الاستلزام العكس النقيض

$$\boxed{p \neq 7 \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{N}^{*} \quad px + y^{p-1} \neq 2017.}$$

● ومنه في حالة $p=5$ أي $(p\neq 7)$.

فالمعادلة لا تقبل حل ومنه $S=\emptyset$.

● في حالة $p=7$ أي

المعادلة لها حلول او لا حلول لها لنأخذ هذه الحلول.

لدينا $y^6 \equiv 1\ [7]$ (حسب ال 1 ج).

ولدينا $7x > 0$ ومنه $2017 = 7x + y^6 > y^6$.

أي $y^6 < 2017$

ومنه $y^6 \leqslant 2016$.

ولدينا $1^6 \leqslant 2016$ و $2^6 \leqslant 2016$

و $3^6 \leqslant 2016$.

و $4^6 = 2^{12} > 2016$ لأن $2^7 = 32\times 4 = 128$

و $3^2\times 7 = 9\times 7 = 63$ و $2^7 > 3^2\times 7$

ومنه $y < 4$

إذن $y=1$ أو $y=2$ أو $y=3$ أي ~~$y\geq 1$~~

ومنه في حالة $y=1$ أي $7x = 2017-1 = 2016$ ومنه $x = 2^5 3^2$

إذن $(x,y) = (2^5\times 3^2, 1)$.

ومنه في حالة $y=2$ أي

$$\left\{\begin{aligned} 7x &= 2017-64 = 2016-63 \\ &= 7(2^5 3^2 - 9). \end{aligned}\right. \quad \text{ومنه } x = 2^5 3^2 - 9.$$

إذن $(x,y) = (2^5\times 3^2 - 9, 2)$.

في حالة $y=3$ أي

$$\left\{\begin{aligned} 7x &= 2017 - 3^6 = 2017-729 \\ &= 2016-728 \\ &= 7(2^5\times 3^2 - 104). \end{aligned}\right. \quad \text{ومنه } x = 2^5\times 3^2 - 104.$$

إذن $(x,y) = (2^5\times 3^2 - 104, 3)$.

ومنه في حالة $p=7$ أي الحلول

$$S = \{(2^5\times 3^2 - 104, 3), (2^5\times 3^2 - 9, 2), (2^5\times 3^2, 1)\}$$

● في حالة $p>7$ أي $p\neq 7$

ومنه حسب (*) المعادلة لا حل لها ومنه $S=\emptyset$.

خاص بكتابة الامتحان

النقطة النهائية
على..................

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك :............ المستوى :.....................

التقدير المفسر للنقطة :.......................................

اسم المصحح :..التوقيع:....................................

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

1- أ-

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$

نضع $X = \frac{1}{x}$.

$x\to0^+ \Longrightarrow X\to+\infty$.

ومنه $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{X\to+\infty} (1+X)\cdot e^{-X}$

$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1+X}{e^X}$

$= \lim_{X\to+\infty} \frac{\frac{1}{X}+1}{\frac{e^X}{X}} = 0.$

لأن $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ و $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}+1 = 1$.

ومنه $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 = f(0)$

إذا f متصلة على اليمين في الصفر.

ب-

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}}{x}$

$= \lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{-1/x}$

3/5

وبما بوضع $X = \frac{1}{x}$ و $x\to0^+ \Rightarrow X\to+\infty$

ومنه $\cancel{\lim_{x\to0^+} e^{-1/x} = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = 0}$

وبما

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{X\to+\infty} (X+X^2)\cdot e^{-X}$

$= \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{X}+1\right)\frac{X^2}{e^X}$

يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يضع أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها

امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان

النقطة النهائية

على ....

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : .... التوقيع: ....

ولدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

و $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

ومنه $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

0,5

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و $\boxed{f'_d(0) = 0}$

ج- لدينا $x \mapsto x$ دالة قابلة للاشتقاق ولا تنعدم على $]0;+\infty[$.

و منه $x \mapsto \frac{1}{x}$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ضمن $\mathbb{R}$.

إذن $x \mapsto e^{-1/x}$ و $x \mapsto 1+\frac{1}{x}$ دوال قابلة للاشتقاق في $]0;+\infty[$.

ومنه $f: x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

علل!

علل!

$\forall x > 0 \quad f'(x) = \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}\right)'$

$= -\frac{1}{x^2} \times e^{-1/x} + \frac{+1}{x^2} e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{1}{x^2} e^{-1/x}\left(-1+1+\frac{1}{x}\right) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}$

0,5

$\boxed{\forall x > 0 \; ; \; f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}}$

2 - أ -

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$.

نضع $y = \frac{1}{x}$ $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0^+$

ومنه، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to 0^+} (1+y) \cdot e^{-y}$

0,5

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1}$

ومنه C يقبل مقاربا أفقيا $y = 1$ بجوار $+\infty$.

ب- لدينا $f'(x)>0$ $\forall x>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ولدينا f مستمرة على المجال المعرف

ومنه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	0 $+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

3-أ- لدينا $x \mapsto e^{-1/x}$ و $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ دوال قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ومنه: $f' : x \mapsto \frac{e^{-1/x}}{x^3}$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

ومنه.

$$f''(x) = \left(\frac{e^{-1/x}}{x^3}\right)' = \frac{(e^{-1/x})' x^3 - 3x^2 e^{-1/x}}{x^6}$$

$$= \frac{+\frac{1}{x^2} e^{-1/x} \times x^3 - 3x^2 e^{-1/x}}{x^6}$$

$$= \frac{x e^{-1/x} - 3x^2 e^{-1/x}}{x^6}$$

$$= \frac{e^{-1/x}(1-3x)}{x^5}$$

x	0 $\frac{1}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	‖ $+$ 0 $-$
$f(x)$	$I(\frac{1}{3}, 4e^{-3})$ نقطة انعطاف

ومنه المنحني C يقبل نقطة انعطاف $I(\frac{1}{3}, 4e^{-3})$.

ب ـ تمثيل المنحنى

لدينا f تزايدية تماماً على $]0;+\infty[$.

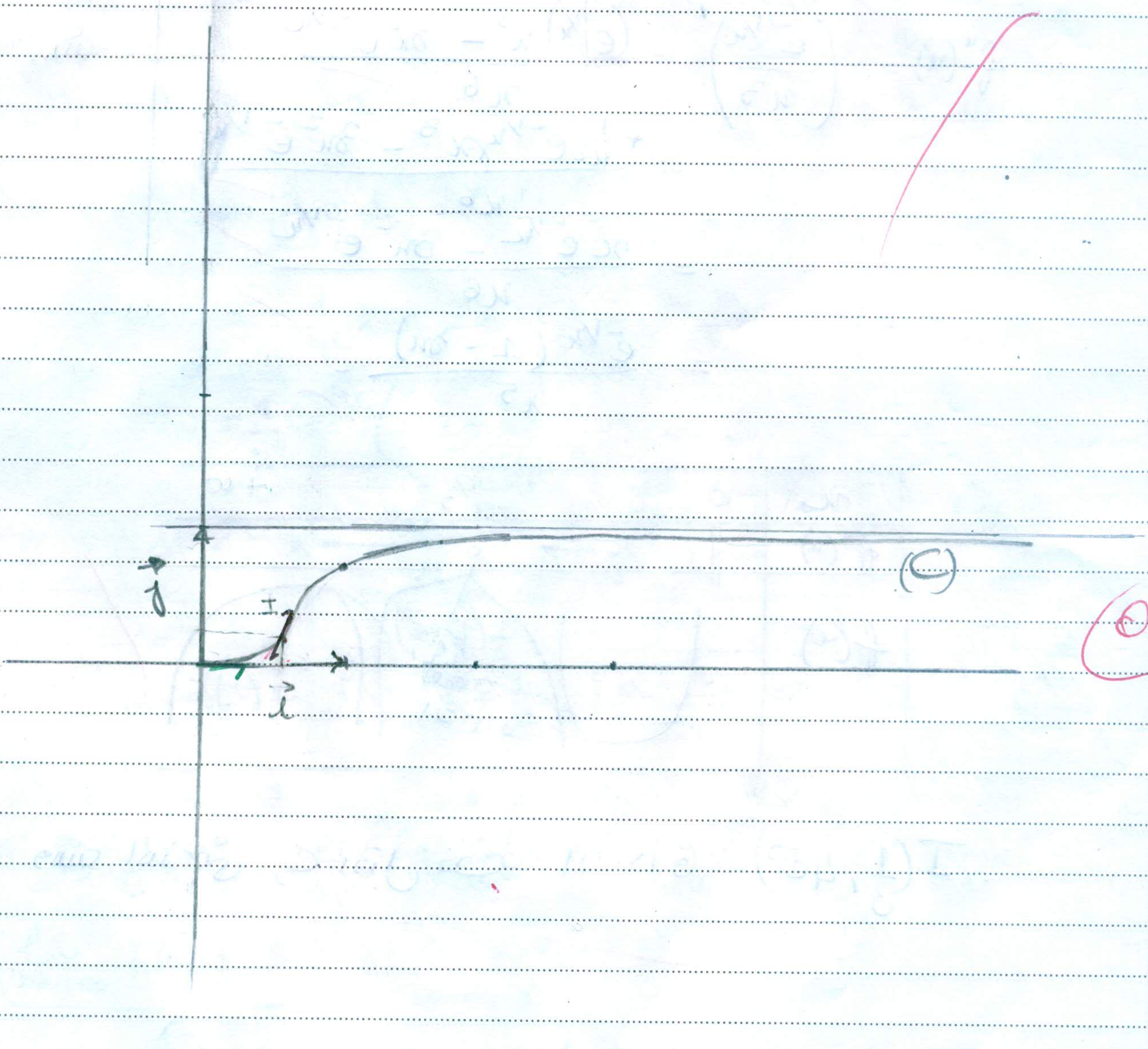
ولدينا f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 . $f'_d(0)=0$

ومنه C يقبل نصف مماس أفقي عند اليمين في 0.

وأيضاً لدينا I نقطة انعطاف

و C يقبل مقارباً أفقياً $y=1$ بجوار $+\infty$.

ومنه التمثيل البياني للمنحنى (C) هو:



خاص بكتابة الامتحان

النقطة النهائية

على.............

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك :............. المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : ....التوقيع: ....

الجزء الثاني :

1 - لدينا f دالة متصلة على $[0;+\infty[$ و $1\in[0;+\infty[$.

ومنه $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على $[0;+\infty[$.

ولدينا $F(x) = -\int_1^x f(t)\,dt$ $\forall x\geq 0$

ومنه الدالة $x\mapsto\int_1^x f(t)\,dt$ دالة أصلية لـ f على $[0;+\infty[$ ومنه فهي متصلة على $[0;+\infty[$:

إذن F دالة متصلة على $[0;+\infty[$.

2 - أ - ليكن $x\in]0;+\infty[$:

لنحسب $\int_x^1 e^{-1/t}\,dt$

نضع : $\begin{cases} u = e^{-1/t} \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{t^2}e^{-1/t} \\ v = t \end{cases}$

إذن :

$$\int_x^1 e^{-1/t}\,dt = \left[t e^{-1/t}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{t^2}e^{-1/t}\,dt$$

ومنه $\forall x>0 : \int_x^1 e^{-1/t}\,dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-1/t}\,dt$

ب - ليكن $x\in]0;+\infty[$

$$\int_x^1 e^{-1/t}\,dt = e^{-1} - xe^{-1/x} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-1/t}\,dt$$

$$\int_x^1 e^{-1/t}\,dt + \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-1/t}\,dt = e^{-1} - xe^{-1/x}.$$

ومنه $\forall x>0 . \int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}\,dt = e^{-1} - xe^{-1/x}.$

ج - لدينا $\int_0^1 f(x)\,dx = ~~\int_0^1~~ F(0)$

ولدينا $\forall x>0 :$ $\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}\,dt = e^{-1} - xe^{-1/x}.$

ومنه

$\forall x>0 :$ $F(x) = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}$

و $\lim_{x\to0^+} F(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-1} - xe^{-1/x} ~~=e^{-1}~~$

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : .... التوقيع: ....

النقطة النهائية

على ....

ولدينا نضع $x = \frac{1}{u}$ ($u \to 0^+ \Rightarrow x \to +\infty$)

$\lim_{u \to 0^+} u e^{-1/u} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0.$

ومنه $\lim_{u \to 0^+} F(u) = 0 + e^{-1}$

ولدينا F متصلة على $[0, +\infty[$ ومنه على اليمين في 0

أي: $\lim_{u \to 0^+} F(u) = F(0)$

ومنه $F(0) = e^{-1}$

خلاصة: $\int_0^1 f(x)\,dx = F(0) = e^{-1}$

أي $\int_0^1 f(u)\,du = e^{-1}$

3- مساحة الحيز المحصور هي

$A = \left(\int_0^2 f(t)\,dt\right) \cdot ua$

$= \left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt\right) ua$

$= \left(e^{-1} - \int_2^1 f(t)\,dt\right) \cdot ua$

$= \left(e^{-1} - (e^{-1} - 2e^{-1/2})\right) ua$ (باستعمال سؤال ب نضع $u=2$ و $2>0$)

$= (2e^{-1/2}) ua = 2e^{-1/2} \times 4\,cm^2$

$\boxed{A = 8e^{-1/2}\,cm^2}$

4- ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا F متصلة على $[0; +\infty[$ و $[n, n+2] \subset [0; +\infty[$.

ولنبين أنها قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$.

لدينا $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ لأنها دالة أصلية

ومنه F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

إذن لدينا الشروط:

F متصلة على $[n, n+2] \subset [0; +\infty[$

و F قابلة للاشتقاق على $]n, n+2[\subset]0; +\infty[$

ومنه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

$\exists V_n \in]n, n+2[\; : \quad F'(V_n) = \frac{F(n+2) - F(n)}{n+2-n}$ ⊛

~~$\exists V_n \in [n, n+2]$~~ على $]0; +\infty[$ وليكن F قابلة للاشتقاق

ومنه $\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \left(-\int_1^x f(t)\,dt\right)'$

$= -f(x)$

ومنه علاقة ⊛ تصبح :

$\exists U_n \in]n, n+2[\quad -f(V_n) = \frac{-U_n}{2}$

أي $\exists V_n \in]n, n+2[\quad \left(1 + \frac{1}{V_n}\right) e^{-\frac{1}{V_n}} = +\frac{U_n}{2}$

أي $\exists V_n \in]n, n+2[\quad U_n = 2\left(1 + \frac{1}{V_n}\right) e^{-1/V_n}$

ب- لبكن n من $\mathbb{N}^*$

نعلم $\exists V_n \in]n, n+2[\quad U_n = 2\left(1 + \frac{1}{V_n}\right) e^{-1/V_n}$

$\exists V_n \in]n, n+2[\quad U_n = 2f(V_n)$

لدينا

$n < V_n < n+2 \Rightarrow f(n) \leq f(V_n) \leq f(n+2)$ (f تزايدية على $]0, +\infty[$)

$\Rightarrow 2f(n) \leq 2f(V_n) \leq 2f(n+2)$

$\Rightarrow 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} \leq U_n \leq 2\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} \leq U_n \leq 2\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$

ج-

لدينا $\lim_{n \to +\infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} = \lim_{n \to +\infty} 2f(n)$

ولدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ومنه

$\lim_{n \to +\infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} = 2$

وأيضا لدينا

$\lim_{n \to +\infty} 2\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}} = \lim_{n \to +\infty} 2f(n+2)$

ولدينا

$\lim_{n \to +\infty} n+2 = +\infty$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} f(n+2) = 1$

$\lim_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}} = 2$. إذا

$2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \leq U_n \leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$ إذا لدينا

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$. فحسب مبادئ التقارب

الجزء الثالث:

1- أ- لدينا f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

ومنه f تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $]0,1[$.

ولدينا لكل $n\in\mathbb{N}^*$:

$n\geq 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\geq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{n}\leq 0$

$\Rightarrow 0<e^{-\frac{1}{n}}<e^{0}$ (exp تزايدية قطعا)

$\Rightarrow e^{-1/n}\in]0,1[$

ومنه $e^{-\frac{1}{n}}\in]0,1[$ ومنه f هي تقبل سابق وحيد بالدالة f في المجال $]0,+\infty[$ لديه هو a_n.

ومنه $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $(\exists! a_n>0)$ $f(a_n)=e^{-1/n}$.

ب- لدينا $n\in\mathbb{N}^*$.

$n+1\geq n \Rightarrow \frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{-1}{n+1}\geq -\frac{1}{n}$

$\Rightarrow e^{-\frac{1}{n+1}}\geq e^{-\frac{1}{n}}$ (exp تزايدية)

$\Rightarrow f(a_{n+1})\geq f(a_n)$.

ومنه $f(a_{n+1})\geq f(a_n)$

ولدينا f تقابل تزايدي على $]0,+\infty[$ ومنه f^{-1} تزايدية على $]0,1[$

إذن $f^{-1}\circ f(a_{n+1})\geq f^{-1}\circ f(a_n)$

إذا $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $a_{n+1}\geq a_n$

ومنه $(a_n)_{n\geq1}$ متتالية تزايدية

امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان

النقطة النهائية

على ....

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : .... التوقيع: ....

ج- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$.

ومنه $\left(1+\frac{1}{a_n}\right) e^{-\frac{1}{a_n}} = e^{-\frac{1}{n}} > 0$.

ندخل الدالة ln

ومنه $\ln\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \cdot e^{-\frac{1}{a_n}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$.

إذا $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) - \frac{1}{a_n} = -\frac{1}{n}}$.

0,25

2- أ- ليكن $t \in [0;+\infty[$.

لدينا

$$t \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow -t^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow 1-t^2 \leq 1$$
$$\Rightarrow (1-t)(1+t) \leq 1 \quad (1+t > 0)$$
$$\Rightarrow 1-t \leq \frac{1}{1+t}.$$

ومن جهة أخرى

$$t \geq 0 \Rightarrow t^3 \geq 0$$
$$\Rightarrow t^3+t^2-t^2+1 \geq 1$$
$$\Rightarrow t^2(t+1) - (t+1)(t-1) \geq 1$$
$$\Rightarrow t^2-(t-1) \geq \frac{1}{1+t}.$$

5/5

0,25

ولدينا $t \geq 0$ ومنه ف $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq t^2-t+1$

إذا

$$\boxed{\forall t \in [0;+\infty[\quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq t^2-t+1}$$

2- ب- ليكن $x \in [0;+\infty[$

لدينا لكل t من $[0,x]$:

$t \geq 0$ ومنه $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq t^2-t+1$

ولدينا $t \mapsto t^2-t+1$ و $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ و $t \mapsto 1-t$ دوال متصلة على $[0,x]$ ومنه

$$\int_0^x (1-t)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \leq \int_0^x (t^2-t+1)\,dt$$

يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يضع أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها

النقطة النهائية

على ....

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : .... التوقيع: ....

ومنه $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[\ln(1+t)\right]_0^x \leq \left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^x$

$x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)-\ln(1) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

0,5

ومنه $\boxed{\forall x \geq 0 \; ; \; -\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)-x \leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$

3 أ ـ لنبين $\underline{; n \geq 4}$

لدينا

$e^{3/4} \geq 2 \Rightarrow e^{-1/4} \times e^1 \geq 2$

$\Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \geq 2e^{-1}$

$\Rightarrow f(a_4) \geq f(1)$

ولدينا f تزايدية ~~قطعا~~ على $[0,+\infty[$ وتقابل أيضا.

إذن f^{-1} تزايدية على $[0,1]$.

ومنه $f^{-1}\circ f(a_4) \geq f^{-1}\circ f(1)$.

إذن $\underline{\underline{a_4 \geq 1}}$

ولدينا $; n \geq 4$ ؛ $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية

إذن $a_n \geq a_4 \geq 1 \quad \forall n \geq 4$.

ومنه $\underline{\underline{a_n \geq 1}}$

3 ـ ب . لدينا $a_n \geq 1$ ومنه $0 < \frac{1}{a_n}$.

ومنه حسب سؤال 2 ـ ب

فإن $-\frac{1}{2a_n^2} \leq -\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \leq -\frac{1}{2a_n^2}+\frac{1}{3a_n^3}$.

ولدينا حسب سؤال 1 ـ ج ؛ $-\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$.

ومنه $-\frac{1}{2a_n^2} \leq -\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{2a_n^2}+\frac{1}{3a_n^3}$

ومنه $\frac{1}{2a_n^2}-\frac{1}{3a_n^3} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2a_n^2}$

ولدينا $2a_n^2 > 0$ و $1 - \frac{2a_n^2}{3a_n^3} < \frac{2a_n^2}{n} \leqslant 1$

$$\boxed{1 - \frac{2}{3a_n} \leqslant \frac{2a_n^2}{n} \leqslant 1}$$

ج- لدينا $a_n \geqslant 1$

ومنه $a_n \geqslant 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} \leqslant 1$

$$\Rightarrow \frac{2}{3a_n} \leqslant \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3a_n} \geqslant -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{3a_n} \geqslant \frac{1}{3}$$

ولدينا $\frac{1}{3} \leqslant 1 - \frac{2}{3a_n} \leqslant \frac{2a_n^2}{n}$

ومنه $0 < \frac{n}{6} \leqslant a_n^2$

إذن $\boxed{\sqrt{\frac{n}{6}} \leqslant a_n}$ $\left(\begin{array}{l}\sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n \\ (a_n > 0)\end{array}\right)$

ولدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{6} = +\infty$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{6}} = +\infty$

~~كذلك~~ ولدينا $\sqrt{\frac{n}{6}} \leqslant a_n$

إذاً حسب مصاديق التقارب $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

د- لدينا $0 < \frac{1}{3} \leqslant 1 - \frac{2}{3a_n} \leqslant \frac{2a_n^2}{n} \leqslant 1$

ومنه $\sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}\, a_n \leqslant 1$ $\left(\sqrt{a_n^2} = a_n \ (a_n > 0)\right)$

~~ولنضع $g : x \mapsto \sqrt{1 - \frac{2}{3x}}$ دالة.~~

~~نعلم أن $x \mapsto 1 - \frac{2}{3x}$ دالة متصلة و تزايدية على $[1;+\infty[$.~~

لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

ومنه: $\lim_{n \to +\infty} \frac{-2}{3a_n} = 0$

أي: $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{2}{3a_n} = 1$

وليبا $\sqrt{x}$ دالة مستمرة في 1 ومنه:

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} = 1$

وليبا: $\sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} \leq a_n \times \sqrt{\frac{2}{n}} \leq 1$ و $\lim_{n \to +\infty} 1 = 1$

وليبا حسب مبرهنة الحصر: 0/1

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}} = 1}$$