امتحانـــات البـكالـــوريا

خاص بكتابة الإمتحان

59430

مادة : ....

الشعبة : .... المستوى : ....

النقطة النهائية

20/20

على ....

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح : .... المؤسسة : .... التوقيع : ....

التمرين الرابع

الجزء الأول

1 - لدينا $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} (1+\ln^2 x) = +\infty$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1+\ln^2(x))$

$= +\infty$

ولدينا

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1+\ln^2(x)) = +\infty$

0,5

إذن (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

2 - أ - لدينا $0 \in D_f$

ولدينا $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x(1+\ln^2(x))$

$= \lim_{x\to0^+} \left(x + (\sqrt{x}\ln x)^2\right)$

0,25

$= \lim_{x\to0^+} \left(\underbrace{x}_{0} + \underbrace{\left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2}_{0}\right) = 0 = f(0)$

إذن f متصلة على اليمين في 0

ب - لدينا

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} (1+\ln^2 x)$

وبما أن $\lim_{0^+} \ln(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to0^+} \ln^2(x) = +\infty$

إذن $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

إذن $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

خاص بكتابة الإمتحان

امتحانات البكالوريا

مادة :...

الشعبة :........................ المستوى :........................

النقطة النهائية
على..................

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح :.................... المؤسسة :.................... التوقيع :....................

إذن (C_f) يقبل مماسا عموديا في النقطة $O(0,0)$ موجه نحو الأعلى 0,25

ج- لدينا f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $\forall x>0 : \quad f'(x) = 1+\ln^2 x + x\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

$= 1+\ln^2 x + 2\ln x$

$= (1+\ln x)^2 \geq 0$

إذن f تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ 0,5
وبما أن f متصلة على اليمين في 0
فإن f تزايدية قطعا على المجال $[0;+\infty[$

3-أ- لدينا $\forall x>0 : \quad f'(x) = (1+\ln x)^2$
ولدينا $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$
إذن $f' : x \mapsto (1+\ln x)^2$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$
و

$\forall x>0 : \quad f''(x) = 2(1+\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{2}{x}(1+\ln x)$

ولدينا لكل $x>0$

$f''(x) \geq 0 \iff \frac{2}{x}(1+\ln x) \geq 0$

$\iff 1+\ln(x) \geq 0 \quad$ (لأن $\frac{2}{x}>0$) 0,25

$\iff \ln x \geq -1$

$\iff x \geq e^{-1}$

إذن f'' موجبة قطعا على $]e^{-1};+\infty[$ وسالبة قطعا على $]0;e^{-1}[$ و تنعدم في e^{-1}

يمنع على المرشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

خاص بكتابة الإمتحان

امتحانات البكالوريا

مادة : ....

الشعبة : .... المستوى : ....

النقطة النهائية

على ....

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح : .... المؤسسة : .... التوقيع : ....

ب - ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$

- ولدينا f متصلة على $[0;+\infty[$

إذن f متصلة على $[e^{-1},1]$

- ولدينا $e^{-1} \leq x \leq 1 \Rightarrow f(e^{-1}) \leq f(x) \leq f(1)$ (لأن f تزايدية على $\mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow e^{-1} \leq 2e^{-1} \leq f(x) \leq 1$

إذن $f([e^{-1},1]) \subset [e^{-1},1]$

- ولدينا $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

- ولدينا $u_0 = e^{-1}$ إذن $u_0 \in [e^{-1},1]$

- ولدينا $\lim u_n = l \in [e^{-1},1]$

إذن $\lim u_n$ هو حل المعادلة $f(x)=x$ في $[e^{-1},1]$

لدينا

$f(x) = x \iff x(1+\ln^2 x) = x$

$\iff (x=0$ أو $1+\ln^2 x = 1)$

$\iff (x=0$ أو $\ln x = 0)$

$\iff (x=0$ أو $x=1)$

$\iff x = 1$ (لأن $x \in [e^{-1},1]$)

إذن $\lim u_n = 1$

إذن $l = 1$

0.11

يمنع على المرشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

خاص بكتابة الإمتحان

امتحانـــات البكالـــوريا

مادة :..

الشعبة :.......................... المستوى :..........................

النقطة النهائية

على..........

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح :.......................... المؤسسة :.......................... التوقيع :..........................

الجزء الثالث

1) أ - لدينا $\ln$ متصلة على $]0;+\infty[$

و $x \mapsto x$ متصلة على $]0;+\infty[$

إذن $h: x \mapsto x\ln x$ متصلة على $]0;+\infty[$

إذن تقبل دوال أصلية على $]0;+\infty[$

ولدينا $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $x \mapsto x^2$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ إذن H قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $\forall x>0: \quad H'(x) = -\frac{1}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x$

$= x\ln x = h(x)$

إذن H دالة أصلية h على $]0;+\infty[$

ب - ليكن $x>0$

لدينا $\int_1^x t\ln^2(t)\,dt = \int_1^x \left(\frac{t^2}{2}\right)'\ln^2(t)\,dt$

$= \left[\frac{t^2\ln^2(t)}{2}\right]_1^x - \int_1^x 2\frac{t^2}{2}\ln t \times \frac{1}{t}\,dt$

$= \frac{x^2\ln^2 x}{2} - 0 - \int_1^x t\ln t\,dt$

$= \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln t\,dt$

ج - ليكن $x>0$

لدينا $F(x) = \int_1^x t(1+\ln^2 t)\,dt = \int_1^x (t + t\ln^2 t)\,dt$

0.25

0.25

يمنع على المرشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

امتحانات البكالوريا

مادة : ....

الشعبة : .... المستوى : ....

النقطة النهائية

على ....

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح : .... المؤسسة : .... التوقيع : ....

فإن $e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt \leq \int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt$

ولدينا $\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt = \left[\ln|t|\right]_x^{2x} = \ln 2x - \ln x$

$= \ln 2$

0,25

إذن:

$\forall x>0 \quad e^{-2x}\ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x}\ln 2$

ج - لدينا $\forall x>0 \quad e^{-2x}\ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x}\ln 2$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}\ln 2 = \ln 2$

و $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-2x}\ln 2 = \ln 2$

0,25

إذن حسب النهايات والترتيب

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \ln 2 = g(0)$

إذن g متصلة على اليمين في 0

2 - لدينا $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$

إذن تقبل دالة أصلية G على $]0;+\infty[$

إذن:

$\forall x>0 \quad g(x) = G(2x) - G(x)$

لدينا $x \mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $\forall x>0 : 2x>0$ و G قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

0,25

إذن $x \mapsto G(2x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

لدينا G قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

يمنع على المرشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

امتحانات البكالوريا

مادة : ....

النقطة النهائية

على..........

الشعبة : .... المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح : .... المؤسسة : .... التوقيع : ....

إذن g كطرق قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $\forall x>0 \quad g'(x)=(2x)'G'(2x) - G'(x)$

$= \frac{2e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x}$

$= \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$

0,25

3 - أ - ليكن $t>0$

إذن $-t<0$

لدينا $f: x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا $[-t,0] \subset \mathbb{R}$

إذن $f: x \mapsto e^x$ متصلة على $[-t,0]$

وقابلة للاشتقاق على $]-t,0[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

$\exists c \in]-t,0[: \frac{e^{-t}-e^{0}}{-t-0} = f'(c)$

إذن $\exists c \in]-t,0[\quad \frac{e^{-t}-1}{-t} = f'(c)$

ولدينا $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = e^x$

و $-t < c < 0$

إذن $e^{-t} < e^{c} \leq 1$

إذن $e^{-t} < f'(c) < 1$

0,5

امتحانـــات البـكالـــوريا

مادة :..

الشعبة :.............................. المستوى :..............................

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية

على..................

خاص بكتابة الإمتحان

إسم المصحح :.............................. المؤسسة :.............................. التوقيع :..............................

التمرين الثاني

1 - لدينا $1436 \times 1056 - 2015 \times 749 = 1$

إذن $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : 1436u + 2015v = 1$

إذن حسب Bezout

$2015 \wedge 1436 = 1$

إذن 2015 و 1436 أوليان فيما بينهما

0,25

2 - أ - لدينا $x^{1439} \equiv 1436 \ [2015]$

إذن $2015 / x^{1439} - 1436$

إذن $\exists K \in \mathbb{Z} : x^{1439} - 1436 = 2015K$

إذن $\exists K \in \mathbb{Z} : 1436 = x^{1439} - 2015K$

ولدينا $d = x \wedge 2015$

إذن d / x و $d / 2015$

ولدينا x / x^{1439} و $2015 / 2015K$

فإن d / x^{1439} و $d / 2015K$

إذن $d / x^{1439} - 2015K$

إذن $d / 1436$

إذن d يقسم 1436

0,5

ب - لدينا $d = x \wedge 2015$

إذن $d / 2015$ ولدينا $d / 1436$

إذن $d / 2015 \wedge 1436$ ونعلم أن $2015 \wedge 1436 = 1$

فإن $d / 1$ إذن $d = 1$ أو $d = -1$

0,5

يمنع على المرشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

امتحانـــات البـكالـــوريا

خاص بكتابة الإمتحان

مادة : ....

الشعبة : .... المستوى : ....

النقطة النهائية

على.....................

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح : .... المؤسسة : .... التوقيع : ....

ونعلم أن $d>0$

إذن $d=1$ إذن $n\wedge 2015=1$

إذن n و 2015 أوليان فيما بينهما

3 - أ - لدينا $n\wedge 2015=1$

إذن $n\wedge(5\times 13\times 31)=1$

إذن $n\wedge 5=1$ و $n\wedge 13=1$ و $n\wedge 31=1$

وبما أن 5 أولي و 13 أولي و 31 أولي

فإن 5 لا يقسم n و 13 لا يقسم n و 31 لا يقسم n

ولدينا 5 أولي موجب و 13 أولي موجب و 31 أولي موجب

إذن حسب Fermat

$n^4\equiv 1[5]$ و $n^{12}\equiv 1[13]$ و $n^{30}\equiv 1[31]$

ولدينا $1440=4\times 360$ و $1440=12\times 120$ و $1440=30\times 48$

إذن $(n^4)^{360}\equiv 1[5]$ و $(n^{12})^{120}\equiv 1[13]$ و $(n^{30})^{48}\equiv 1[31]$

إذن $n^{4\times 360}\equiv 1[5]$ و $n^{12\times 120}\equiv 1[13]$ و $n^{30\times 48}\equiv 1[31]$

إذن $n^{1440}\equiv 1[5]$ و $n^{1440}\equiv 1[13]$ و $n^{1440}\equiv 1[31]$

ب - لدينا $n^{1440}\equiv 1[5]$ و $n^{1440}\equiv 1[13]$

إذن $5/n^{1440}-1$ و $13/n^{1440}-1$

وبما أن $5\wedge 13=1$ فإن $5\times 13/n^{1440}-1$

إذن $65/n^{1440}-1$

يمنع على المرشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

امتحانـــات البــكالــوريا

مادة :..

الشعبة :...................... المستوى :....................

النقطة النهائية

على..................

خاص بكتابة الإمتحان

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح :...................... المؤسسة :...................... التوقيع :......................

التمرين الأول

1 - أ - لدينا مميز المعادلة (E) هو

$\Delta = (5+i\sqrt{3})^2 - 4(4+4i\sqrt{3})$

$= 25 - 3 + 10i\sqrt{3} - 16 - 16i\sqrt{3}$

$= 6 - 6i\sqrt{3}$

ولدينا من جهة أخرى $(3-i\sqrt{3})^2 = 9 - 3 - 6i\sqrt{3}$

$= 6 - 6i\sqrt{3}$

0,25

إذن مميز المعادلة (E) هو $(3-i\sqrt{3})^2$

ب - لدينا مميز (E) هو $(3-i\sqrt{3})^2 \neq 0$

إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{C}$ هما

$z_1 = \frac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \frac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}$

إذن

$z_1 = 4$ و $z_2 = 1+i\sqrt{3}$

0,5

وبما أن $b \in \mathbb{R}$ فإن $b = z_1$ و $a = z_2$

إذن $a = 1+i\sqrt{3}$ و $b = 4$

ج - لدينا $(1-i\sqrt{3})a = (1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$

$= 1^2 - (i\sqrt{3})^2 = 1+3 = 4 = b$

0,25

إذن $b = (1-i\sqrt{3})a$

2 - أ - ليكن R الدوران الذي مركزه a وزاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن الصيغة العقدية لـ R هي

$z' - a = i(z - a)$

إذن $z' - (1+i\sqrt{3}) = i(z - (1+i\sqrt{3}))$

امتحانـــات البكالـــوريا

خاص بكتابة الإمتحان

مادة :...

الشعبة :........................ المستوى :........................

النقطة النهائية

على...................

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح :.......................... المؤسسة :.......................... التوقيع :..........................

إذن : $z' = i(z-(1+i\sqrt{3})) + 1+i\sqrt{3}$

ولدينا $R(O) = B_1$

إذن : $b_1 = i(-(1+i\sqrt{3})) + 1+i\sqrt{3}$

$= (1+i\sqrt{3})(1-i)$

$= (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$

0.5

ب - لدينا h التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{3}$

إذن الصيغة العقدية ل h هي

$z' - (1+i\sqrt{3}) = \sqrt{3}(z-(1+i\sqrt{3}))$

إذن : $z' = \sqrt{3}(z-(1+i\sqrt{3})) + (1+i\sqrt{3})$

إذن : $z_{h(B_1)} = \sqrt{3}(b_1 - (1+i\sqrt{3})) + 1+i\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}((1+i\sqrt{3}) - i(1+i\sqrt{3}) - (1+i\sqrt{3})) + 1+i\sqrt{3}$

$= -\sqrt{3}i(1+i\sqrt{3}) + (1+i\sqrt{3}) = (1+i\sqrt{3})(1-\sqrt{3}i)$

$= (1-i\sqrt{3})a = b = z_B$

0.75

إذن $B = h(B_1)$

إذن B صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{3}$

ج - لدينا $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})a}{(1-i\sqrt{3})a - a}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1}\right) [2\pi]$ (لأن $a \neq 0$)

يمنع على المرشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الإمتحان

مادة :..

الشعبة :.................................... المستوى :..........................

النقطة النهائية

على..................

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح :................................ المؤسسة :................................ التوقيع :..................

التمرين الثالث

1 - أ - لدينا φ تطبيق من $\mathbb{R}$ نحو E

ليكن x و y من $\mathbb{R}$

لدينا $\varphi(x) \, T \, \varphi(y) = M(x-1) \, T \, M(y-1)$

$$= M(x-1+y-1+1) = M(x+y-1)$$

$$= \varphi(x+y)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو (E,T)

ب - لدينا φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو (E,T)

لنبين أن φ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو E

ليكن $M(x)$ من E $(x \in \mathbb{R})$ نحدد a وحيد من $\mathbb{R}$ بحيث $\varphi(a) = M(x)$

لدينا $\varphi(a) = M(x) \iff M(a-1) = M(x)$

$$\iff \begin{pmatrix} -a+2 & a-1 \\ -2a+2 & 2a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2-a = 1-x \\ a-1 = x \\ -2a+2 = -2x \\ 2a-1 = 1+2x \end{cases} \iff a = x+1 \in \mathbb{R}$$

إذن a موجود و وحيد من $\mathbb{R}$

إذن φ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو E

ومنه φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو (E,T)

وبما أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية

فإن (E,T) زمرة تبادلية

يمنع على المرشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها.

امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الإمتحان

مادة : ....

الشعبة : .... المستوى : ....

النقطة النهائية

على..............

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح : .... المؤسسة : .... التوقيع : ....

-1)2 ليكن x و y من $\mathbb{R}$

لدينا

$$M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-y & y\\ -2y & 1+2y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y)\\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-x-xy-y & x+xy+y\\ -2x-2y-2xy & 2x+1+2y+2xy\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-(x+y+xy) & x+y+xy\\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy)\end{pmatrix}$$

$$=M(x+y+xy)$$

ب- لدينا $E\subset M_2(\mathbb{R})$ حسب تعريفها ولدينا $I=M(0)\in E$

إذن $E\neq\emptyset$ لتكن $M(x)$ و $M(y)$ من E (x و y من $\mathbb{R}$)

لدينا $M(x)\times M(y)=M(\underbrace{x+y+xy}_{\in\mathbb{R}})\in E$

إذن $M(x)\times M(y)\in E$ إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ولتكن $M(x)$ و $M(y)$ من E

لدينا $M(y)\times M(x)=M(y+x+yx)=M(x+y+xy)$

$=M(x)\times_E M(y)$

إذن × تبادلي في

ج - لنتكن $M(x)$ و $M(y)$ و $M(z)$ من E

لدينا

$$M(x) \times (M(y) \top M(z)) = M(x) \times M(y+z+1)$$
$$= M(x+y+z+1+xy+xz+x)$$
$$= M(x+y+xy+x+z+xz+1)$$
$$= M((x+y+xy)+(x+z+xz)+1)$$
$$= M(x+y+xy) \top M(x+z+xz)$$
$$= (M(x)\times M(y)) \top (M(x)\times M(z))$$

وبما أن $\times$ تبادلي في E

فإن $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $\top$ في E

د - لدينا $M(-1)\in E$

ولنكن $M(x)$ من E $\quad M(x) \top M(-1) = M(x-1+1)$
$$= M(x)$$

ولدينا كذلك $\quad M(-1) \top M(x) = M(-1+x+1)$
$$= M(x)$$

إذن $\forall M(x) \in E: \quad M(x) \top M(-1) = M(x) = M(-1) \top M(x)$

إذن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في $(E, \top)$

و لدينا حسب 2 - ب E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}))$

و I هو العنصر المحايد في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(0) \in E$

إذن I هو العنصر المحايد في $(E, \times)$

3 _ أ _ ليكن x من $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

لدينا $M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=M\left(x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right)$

$$=M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)=M(0)=I$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

ب _ لدينا حسب 1 _ ب) (E,T) زمرة تبادلية

ولدينا حسب 2 _ ج) $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E

ولدينا E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

و $\times$ تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$

إذن $\times$ تجميعي في E

ولدينا $\times$ يقبل عنصرا محايدا في E هو I

ولدينا $\times$ تبادلي في E

إذن $(E,T,\times)$ حلقة تبادلية وأحدية

ولدينا حسب 3 _ أ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}:\ M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=I$

إذن $\forall M(x)\in E\setminus\{M(-1)\}\quad M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=I$

حيث $M(-1)$ هو العنصر المحايد في (E,T)

و I العنصر المحايد في $(E,\times)$

وبما أن $\times$ تبادلي في E

فإن $M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=I=M\left(\frac{-x}{1+x}\right)\times M(x)$

و $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)\in E$ نفترض أن $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=M(-1)$

إذن:

$$\begin{pmatrix}1-\frac{-x}{1+x} & \frac{-x}{1+x}\\ -2\left(\frac{-x}{1+x}\right) & 1+2\left(\frac{-x}{1+x}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$$

إذن $\frac{-x}{1+x}=-1$ إذن $-x=-1-x$

إذن $-1=0$ وهذا تناقض إذن $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)\in E\setminus\{M(-1)\}$

إذن كل عنصر $M(x)$ من $E\setminus\{M(-1)\}$ يقبل مماثلا في $(E\setminus\{M(-1)\},\times)$

وبالتالي $(E,T,\times)$ جسم تبادلي

إذن $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg(\sqrt{3}+i) - \underbrace{\arg(\sqrt{3})}_{\equiv 0 [2\pi]} [2\pi]$

$\equiv \arg(\sqrt{3}+i) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right) [2\pi]$ 01

$\equiv \underbrace{\arg(2)}_{\equiv 0 [2\pi]} + \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) [2\pi] \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

د - لدينا C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB وتختلف عن O و A

إذن O و A و B و C متداورة

إذن O و A و B و C متداورة أو مستقيمية

إذن $\frac{c-0}{c-a} \times \frac{b-a}{b-0} \in \mathbb{R}$

إذن $\arg\left(\frac{c}{c-a} \times \frac{b-a}{b}\right) \equiv 0 [\pi]$

إذن $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{b-a}{b}\right) \equiv 0 [\pi]$

إذن $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-a}{b}\right) [\pi]$

ولدينا $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{6} [\pi]$ 01

إذن $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [\pi]$

إذن $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$

إذن $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$

إذن أحد القيم التي يمكن أن يأخذها

عمدة العدد $\frac{c}{c-a}$ هي $\frac{\pi}{6}$ أو $\frac{-5\pi}{6}$

إذن $x^{1440} \equiv 1[65]$

ولدينا $x^{1440} \equiv 1[31]$

إذن $65 / x^{1440} - 1$ و $31 / x^{1440} - 1$

ولدينا $5 \wedge 31 = 1$ و $31 \wedge 13 = 1$ (0,25)

إذن $31 \wedge (5 \times 13) = 1$ إذن $31 \wedge 65 = 1$

إذن $31 \times 65 / x^{1440} - 1$

إذن $3 \times 13 \times 31 / x^{1440} - 1$ أي $2015 / x^{1440} - 1$

إذن $x^{1440} \equiv 1[2015]$

(4 لدينا $x^{1440} \equiv 1[2015]$

إذن $x^{1439} \times x \equiv 1[2015]$

ولدينا $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$

إذن $1436x \equiv 1[2015]$

إذن $(1436 \times 1051) x \equiv 1051 \ [2015]$

ولدينا $1436 \times 1051 = 1 + 2015 \times 749$

إذن $x(1 + 2015 \times 749) \equiv 1051 [2015]$

إذن $x + 2015 \times 749 \times x \equiv 1051 \ [2015]$

ولدينا $2015 / 2015 \times 749 x$

إذن $2015 \times 749 \ x \equiv 0 [2015]$

إذن $x + 0 \equiv 1051 \ [2015]$ (0,25)

إذن $x \equiv 1051 \ [2015]$

إذن $\quad e^{-t} \leq \dfrac{e^{-t}-1}{-t} \leq 1$

إذن $\quad -1 \leq \dfrac{e^{-t}-1}{t} \leq -e^{-t}$

ب ـ ليكن u موجب إذن $2u > u$

وليكن t من $\mathbb{R}$ حيث $u \leq t \leq 2u$

إذن $t > 0$

إذن حسب 3 ـ أ ـ

$$-1 \leq \frac{e^{-t}-1}{t} \leq e^{-t}$$

وبما أن $2u > u$ والدوال متصلة

فإن $\displaystyle\int_u^{2u} -1\,dt \leq \int_u^{2u}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{1}{t}\right)dt \leq \int_u^{2u} -e^{-t}\,dt$

إذن $\displaystyle -u \leq g(u) - \int_u^{2u}\frac{1}{t}\,dt \leq \int_u^{2u} -e^{-t}\,dt$

ولدينا سابقا $\displaystyle\int_u^{2u}\frac{1}{t}\,dt = \ln 2$

ولدينا $\displaystyle\int_u^{2u} -e^{-t}\,dt = \left[e^{-t}\right]_u^{2u}$

$$= e^{-2u} - e^{-u}$$

0.12

إذن $\quad -u \leq g(u) - \ln 2 \leq e^{-2u} - e^{-u}$

وبما أن $u > 0$

$$\forall u > 0 \qquad -1 \leq \frac{g(u)-\ln 2}{u} \leq \frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u}$$

$\forall x > 0 \quad -1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$ لدينا

$\forall x > 0 \quad -1 \leq \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$ إذن

ولدينا

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{-2x} - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{x} \right)$

$= \lim_{x \to 0^+} \left((-2) \underbrace{\frac{e^{-2x} - 1}{-2x}}_{1} + \underbrace{\frac{e^{-x} - 1}{-x}}_{1} \right)$

$= -2 + 1 = -1$

إذن حسب النهايات والترتيب

$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1 \in \mathbb{R}$ فإن

إذن g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

0,25

0,25

إذن :

$$F(x) = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x + \int_1^x t\ln^2 t\,dt$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln t\,dt\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int_1^x h(t)\,dt$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left[H(t)\right]_1^x$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\ln^2 x - H(x) + H(1)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$$

2 - أ

~~لدينا $\ln$ متصلة على $]0;+\infty[$~~

~~و $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ متصلة على $]0;+\infty[$~~

~~إذن $x \mapsto -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$ متصلة على $]0;+\infty[$~~

~~ولدينا $x \mapsto \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4}$ متصلة على $]0;+\infty[$~~

~~إذن F كمجموع متصلة على $]0;+\infty[$~~

~~ولدينا $\lim_{x\to 0^+} -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4}$~~

لدينا $\forall x \geq 0$; $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

ولدينا f متصلة على $[0;+\infty[$

و $1 \in [0;+\infty[$

إذن F هي الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم في 1 على $[0;+\infty[$

إذن F متصلة على $[0;+\infty[$

ب- لدينا : $\forall x>0 : F(x) = \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2(\ln x)^2}{2}$

إذن : $\lim_{x\to0^+} F(x) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{-3}{4} + \underbrace{\frac{3x^2}{4}}_{0} - \overset{0}{\frac{x}{2}}\underbrace{(x\ln x)}_{0} + \frac{\overset{0}{(x\ln x)}^2}{2}\right)$

$= \frac{-3}{4}$ 0,25

وبما أن F متصلة على $[0,+\infty[$

فإن : $F(0) = \lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{-3}{4}$

ولدينا $F(0) = \int_1^0 f(t)\,dt$

إذن $\int_0^1 f(t)\,dt = -F(0)$ 0,25

إذن $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{3}{4}$

التمرين الخامس

1 - أ- ليكن $x>0$ وليكن t من $\mathbb{R}$ بحيث $x\leq t\leq 2x$ إذن $x\leq 2x$

إذن : $-2x \leq -t \leq -x$

إذن : $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$ (لأن $x\mapsto e^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$) 0,5

ومنه $(\forall x>0)(\forall t\in[x,2x]) : e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$

ب- ليكن $x>0$ ... إذن $2x>x$
وليكن t من $\mathbb{R}$ بحيث $0<x\leq t\leq 2x$

إذن حسب 1) أ- $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$

ولدينا $x\leq t$ ومنه $x>0$ إذن $\frac{1}{t}>0$

إذن $\frac{e^{-2x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t}$

وبما أن $2x\geq x$ والدوال متصلة

إذن (C) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها e^{-1}

ب- لدينا $x>0$

لدينا $f(x) - x = x\ln^2 x$

وبما أن $x>0$ و $\ln^2 x \geq 0$

فإن $f(x) - x \geq 0$

ولدينا لكل $x>0$

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

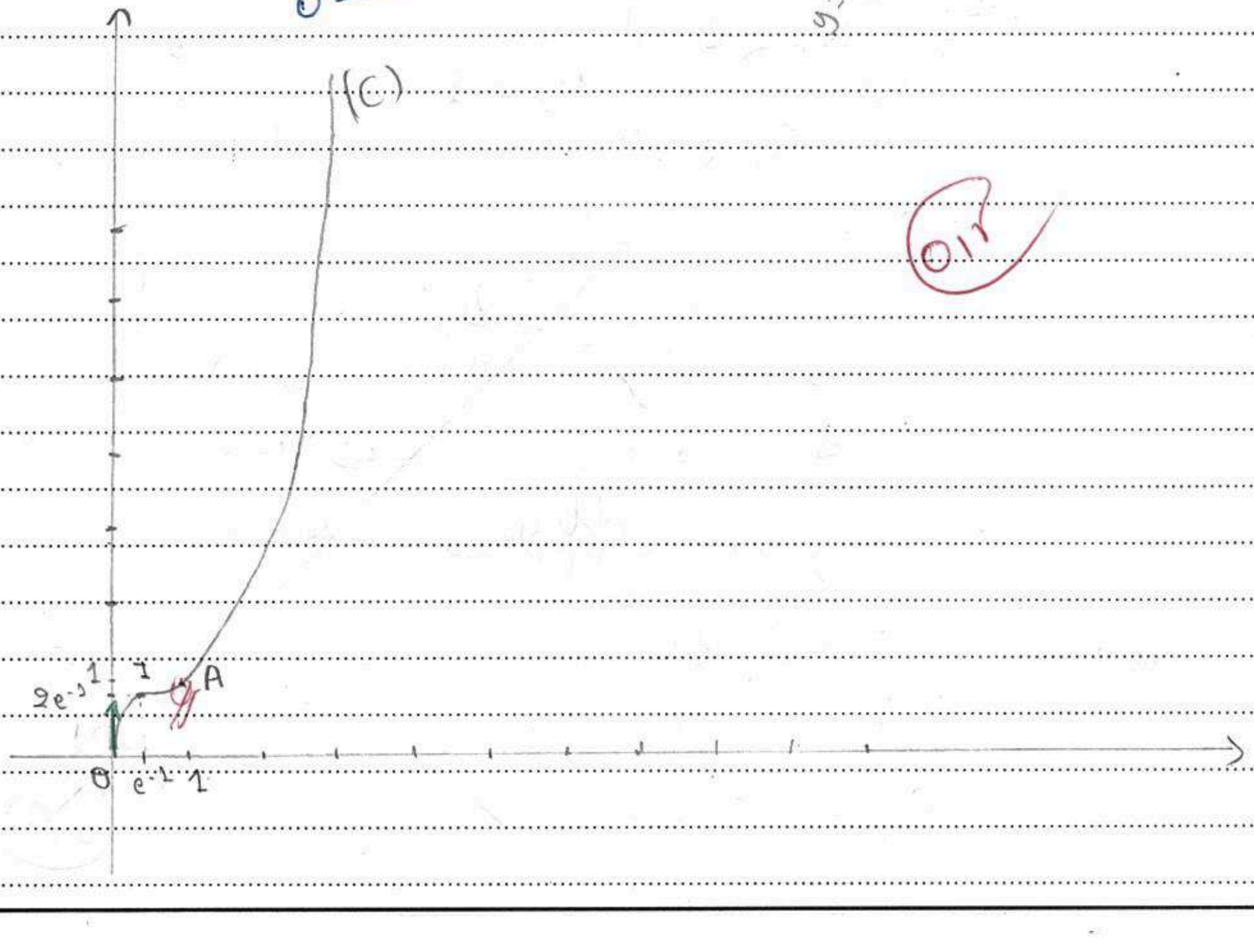
ولدينا $f(0) - 0 = 0$

إذن (C) يوجد فوق المستقيم ذو المعادلة $y=x$ ويقطعه في النقطتين $O(0,0)$ و $A(1,1)$

x	0		1		$+\infty$
الوضع النسبي		(C_f) فوق المستقيم ذو المعادلة $y=x$		(C_f) فوق المستقيم ذو المعادلة $y=x$	

ج- لدينا جدول تغيرات f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



الجزء الثاني

1) لدينا من أجل $n=0$: $e^{-1} \leq u_0 = e^{-1} < 1$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن : $0 < e^{-1} \leq u_n < 1$

ولدينا g تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

إذن : $2e^{-1} = g(e^{-1}) \leq g(u_n) < g(1) = 1$

وبما أن $e^{-1} < 2e^{-1}$

فإن : $e^{-1} \leq u_{n+1} < 1$

وبالتالي $e^{-1} \leq u_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) ليكن n من $\mathbb{N}$

لدينا حسب 3 - ب في الجزء الأول لكل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) - x \geq 0$

وبما أن $u_n \geq 0$

$g(u_n) - u_n \geq 0$

إذن $u_{n+1} - u_n \geq 0$

ولدينا حسب 3 - ب في الجزء الأول

$g(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ أو $x = 1$

وبما أن $e^{-1} \leq u_n < 1$

إذن : $u_n \neq 0$ و $u_n \neq 1$

إذن $g(u_n) \neq u_n$

ومنه $g(u_n) - u_n > 0$

إذن $u_{n+1} > u_n$

إذن $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعا

وبما أنها مكبورة بـ 1

فإن $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة

3 - أ) لدينا $e^{-1} \leq u_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

إذن $e^{-1} \leq \lim u_n \leq 1$

إذن $e^{-1} \leq \ell \leq 1$

0.12
0.12
0.12