الاستاذ: محمد بنيو
الثانوية التاهيلية ابطيح
10/06/2010

عزيزي التلميذ
لقد فزت بالباكالوريا و أنت الآن مقبل على تلقي تكوينك و تعليمك بلغات أجنبية،لذي اقترح عليك التصحيح باللغة الفرنسية آملا ألا يعترضك اذنى غموض في فهمه و أن يكون
مساعدا لك في تهييئك للمباريات الشفوية و الكتابية للمعاهد و المدارس والكليات.
مرحبا بجميع ملاحظاتك و تساؤلاتك .

Exrcice 01 (3.5 pts).

Les parties I et II sont independantes.

I- On munit l'ensemble $I =]0;+\infty[$ *par la loi de composition interne * définie par :*

$(\forall(a,b) \in I \times I)\ \ a*b = e^{\ln(a).\ln(b)}$

1) *Prouvons que * est commutative et associative dans I.*

Commutativité et associativité résultentProuvons qu de la commutativité et de l'asociativité de la multiplication dans IR.

2) *Prouvons que * admet un element neutre* ε *que l'on determinera.*

Il est evident que $\varepsilon = e$.

3) a- *Prouvons que (* $I\setminus\{1\}$ *;*) est un groupe commutatif.*

Il suffit de montrer que $I\setminus\{1\}$ *est stable par *,utiliser ensuite les questions 1 et 2 puis prouver que tout element de* $I\setminus\{1\}$ *admet un symetrique.(le symetrique de a est le reel a' tel que a*a'=e c à d ln(a).ln(a')=1,et en decoule que a'=*$e^{\frac{1}{\ln(a)}}$.

Conclure.

b- *Montrons que (* $]1;+\infty[$ *;*) est un sous-groupe de (* $I\setminus\{1\}$ *;*).*

Il suffit de montrer que $]1;+\infty[$ *est stable par *et par passage au symetrique.*

En effet ,pour a et b elements de $]1;+\infty[$*,le nombre* $a*b = e^{\ln(a).\ln(b)}$ *est bien un element de* $]1;+\infty[$ *car strictement superieur à 1 puisque ln(a).ln(b)>0.*

De même ,a' >1 car ln(a)>0.

4) *on munit I de la loi de composition interne* $\times$ *(multiplication dans IR).*

a-*Montrons que * est distributive/*$\times$

Soient a,b et c trois elements de I ,il s'agit de montrer que $a*(b\times c)=(a*b)\times(a*c)$.

En effet,

$a*(b\times c)=e^{\ln(a).\ln(b\times c)} = e^{\ln(a).(\ln(b)+\ln(c))} = e^{\ln(a).\ln(b)+\ln(a).\ln(c)} = e^{\ln(a).\ln(b)} \times e^{\ln(a)\ln(b)} = (a*b)\times(a*c)$.

b-*Prouvons que* $(I,\times,*)$ *est un corps commutatif.*

Revoir la definition du corps commutatif et collecter des questions precedentes toutes les proprietés pour prouver que $(I,\times,*)$ *est un corps commutatif.*

II- oonsidere la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1- Calculons A^2 et A^3.

A^2=.....et $A^3=0$

2- *La matrice A n'admet pas d'inverse,sinon ,il existerait une matrice A' verifiant AA'=I(I matrice unité)*

AA'= I $\Leftrightarrow$ $A^3A'=A^2$ ce qui implique $0=A^2$ et contredira $A^2 \neq 0$,par suite la matrice A n'admettrait pasun inverse.

Exercice 2(3.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repere orthonormal directe $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) a- Determination des racines carrés du nombre complexe 3+4i.

2+i et -2-i sont les racines cherchées.

b- Resolvons dans C l'équation (E) : $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

Son determinant etant4(3+4i) dont une racine est 4+2i

Les racines de (E) sont alors –sauf erreurs de calculs- : $b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et $a = -\frac{1}{2} + i$

L'ensemble de solution de (E) est $S = \{a;b\}$.

2) Soient A(a) et B(b)

a- Montrons que $\frac{b}{a} = 1 - i$

Faites un simple calcul.

b-Montrer que le triangle AOB est isocele et rectangle en A.

Remarquez que $arg\frac{b-a}{-a} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (car $\frac{b-a}{-a} = i$) et conclure.

3) C est un point different de A d'éffixe c , D image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et L image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$

- on a A(a),B(b) ;C(c) ;D(d) ;L(l)

pour la suite ,ecrire les expressions complexes de la rotation et de la translation et deduire.

Exercice 3(3pts)

1)Determinons les entiers naturels m verifiant : $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

*Méthode 1 :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de m²+1 par 5	1	2	0	0	2

On en deduit que seules $m \equiv 2\ [5]$ $ou\ m \equiv 3\ [5]$ repondent à la question.

L'ensemble de solution de l'equation est bien $S = \{m \in N /\ m \equiv 2\ [5]\ ou\ m \equiv 3\ [5]\}$

*Méthode 2 :

Remarquez que $m^2 + 1 \equiv 0[5]$ équivaut à $m^2 \equiv 4[5]$ et ceci signifie que 5/m²-4 et par suite 5 étant premier ,5/m+2 ou 5/m-2 et en découle $m \equiv 2\ [5]$ $ou\ m \equiv 3\ [5]$

*Méthode 3 :

Donner à m les valeurs 0,1,2,3,4,5,6,,7,8,9,10,11,12,13,14,...et remarquer que les valeurs possibles sont :2,7,12,....d'une part et 3,8,13....d'autre part

Le premier groupement de valeurs est congru à 2 modulo 5 et l'autre à 3 modulo 5

Et faire une démonstration par récurrence .

2) soit p un nombre premier tel que p=3+4k (k entier naturel) et n un entier naturel verifiant $n^2 + 1 \equiv 0\ [p]$

a- Prouvons que $(n^2)^{1+2k} \equiv -1[p]$

Utiliser la proprieté :si a est congru à b mod r alors a^n est congru à b^n mod r pour tout n element de IN

b- Montrons que n et p sont premiers entre eux.

D'apres la question precedente,il existe un entier q /$(n^2)^{1+2k}$=-1+pq et en vient p.q-n.n^{1+4k}=1 et ceci vous fait penser à quoi.....deduire.

c-Déduisons que $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\ [p]$

Application directe du theoreme de Fermat avec p premier et p=3+4k.(p-1=2(1+2k))

d- Deduisons qu'il n'existe pas d'entiers n / n²+1 $\equiv$ 0 $[p]$

Si un tel nombre existe ;le nombre $(n^2)^{1+2k}$ aurait pour reste- de la division euclidienne par p – 1 et p-1 et ces deux restes sont forcement egaux,ce qui donne p=2 ,ceci est impossible puisque p>3(voir la condition p=3+4k ;k element de IN).

Exercice 4(6.25pts)

I- on conside la fonction f definie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$.(C) sa courbe representative dans le plan rapporté à un repere orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calcul de limite de f en $+\infty$.

Cette limite vaut 0.(la courbe representative admet l'axe des abscisses pour asymptote au voisinage de $+\infty$).

2) Derivabilité de f.

f est derivable sur $[0;+\infty[$,de derivée $f'(x)=4(1-2x^2)e^{-x^2}$.

conclure et dresser le tableau de variations.

3) l'equation de la demi-tangente en 0

C'est :$y=f'_d(0)(x-0)+f(0)$($f'_d(0)$ désigne le nombre derivé à droite en 0).

4) Calcul de l'integrale a.

Remarquer que la dérivée de e^{-x^2} est $-2xe^{-x^2}$ et procéder par changement de variable.

Multiplier la valeur de a par 4cm² pour déduire la surface demandée.

I- il s'agit d'une famille de fonctions(دوال أسرة) $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$(n entier naturel).

1) a -Montrons que ,pour tout x>1 :$e^{-x^2}<e^{-x}$

Comparer x² et x sur $]1;+\infty[$ et deduire.

b- Deduisons la limite de f en $+\infty$.

Ona $0 \le f_n(x) \le 4xe^{-x}$ et $\lim\limits_{+\infty} 4xe^{-x} = 0$,donc la limite de f_n en $+\infty$ est $+\infty$.

2) Etude des variations de f_n.

f_n est derivable sur $[0;+\infty[$ de derivée $f_n'(x)=4x^{n-1}(n-8x^2)e^{-x^2}$(refaire les calculs).

Dresser le tableau des variations.

3) Existence et unicité de un racine de $f_n(x)=1$.

Appliquer le theoreme des valeurs intermidiares sur $[0;1]$

4) a- S'assurons que $f_{n+1}(u_n)=u_n$(n entier naturel superieur ou égal à 2)

Il s'agit d'un simple calcul.

b- Montrons que (u_n) est strictement croissante et deduire qu'elle convergente.

Remarquer que $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et utiliser la monotonie de f_n sur $[0;1]$ pour deduire la reponse.

5) a- prouvons que $0 < l \le 1$.

u_n étant compris entre 0 et 1,par passage à la limite $0 \le l \le 1$ .remarquer que la limite ne peut etre 0 car la suite est crissante et à termes strictement positif.donc $0 < l \le 1$.

b- Encadremet .

$f_{n+1}(u_n) = u_n \Rightarrow 4u_n^n = e^{u_n^2}$ et $0 < u_n^2 < 1$

Donc $1<4u_n^n<e$.

c- proprieté de limites , d'inégalités et du logarithme.

Exercice 5(3.75 pts)

La fonction F est definie sur IR*par : $F(x)= \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

1) -Montrons que F est paire.

IR* est bien symetrique par rapport à 0.comparer F(-x) à F(x).conclure.

2) pour tout x de IR+* ,on pose : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

a-Mettons en evidence l' égalité : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ pour tout x>0

La fonction φ est par definition la primitive ,s'annulant en 1,de la fonction $t \to \frac{1}{ln(1+t^2)}$ sur IR+*.Il en vient donc que : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ pour tout x>0.

b- Les fonctions $x \to \varphi(x)$, $x \to 2x$ sont derivables sur $]0;+\infty[$,et par la suite la fonction F l'est aussi.

On a pour tout x de $]0;+\infty[$: $F'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = \frac{2}{ln(1+4x^2)} - \frac{1}{ln(1+x^2)}$ (il faut s'assurer de tout calcul,le refaire...)

c- Variations de F sur $]0;+\infty[$.

Comparer $(1+x^2)^2$ et $1+4x^2$ sur $]0;+\infty[$.deduire le signe de F' et ensuite les variations de F sur $]0;+\infty[$.

3)a- Application directe du theoreme des accroissements finies sur $[x;2x]$ pour la fonction F.

b- prendre c dans $[x;2x]$ et encadrer $\frac{1}{ln(1+c^2)}$;l' expression demandée est alors prouvée.

c- Utiliser les limites connues de la fonction logarithme.

d- utiliser l'encadrement de la question b.la continuité et le theoreme des valeurs intermidiares.conclure.