ثانوية محمد الخامس - القنيطرة - الأستاذ محمد غريز	تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبـاكـالوريـا الدورة -العادية- 2008	الثانية علوم رياضية أ و ب

التمرين الاول

1 - أ - لدينا $E \subset M_2(\mathbb{R})$ و $E \neq \phi$ لان $M(0.0) \in E$

لنبين أن $\alpha M_1 + \beta M_2 \in E$ $\quad \forall (M_1.M_2) \in E^2 \quad \forall (\alpha.\beta) \in \mathbb{R}^2$

لدينا $M_1 = a_1 I + b_1 J$ و $M_2 = a_2 I + b_2 J$ اذن $\alpha M_1 + \beta M_2 = (\alpha a_1 + \beta a_2) I + (\alpha b_1 + \beta b_2) J$

اذن $\alpha M_1 + \beta M_2 \in E$ اذن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

ب - لدينا $M(a,b) = aI + bJ$ $(\forall M \in E)$ اذن الأسرة (I,J) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,.)$

$$\forall (\alpha.\beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha I + \beta J = O \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{3}\beta \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ و } \beta = 0$$

اذن الأسرة (I,J) حرة . و منه الأسرة (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(E,+,.)$

2 -
$$f : \mathbb{C}^* \to E^*$$
$$a + ib \to M(a,b)$$

أ - ليكن M_1 و M_2 عنصرين من E^*

لدينا $M_1 = a_1 I + b_1 J$ و $M_2 = a_2 I + b_2 J$ اذن $M_1 \times M_2 = a_1 a_2 I + (a_1 b_2 + a_2 b_1) J + b_1 b_2 J^2$

لنحسب J^2 . - لدينا $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ أي $\boxed{J^2 = -I}$

اذن $M_1 \times M_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) I + (a_1 b_2 + a_2 b_1) J$

اذن $M_1 \times M_2 \in E$ $\quad \forall (M_1.M_2) \in E^2$. اذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب - لكل (a,b,a',b') من $\mathbb{R}^4$

لدينا $f\left[(a+ib)\times(a'+ib')\right] = f\left[(aa'-bb') + i(ab'+a'b)\right]$

$$= M(aa'-bb', ab'+a'b)$$
$$= (aa'-bb')I + (ab'+a'b)J$$

لدينا $f(a+ib) \times f(a'+ib') = M(a,b) \times M(a',b')$

$$= (aI+bJ)(a'I+b'J) = (aa'-bb')I + (ab'+a'b)J$$

اذن $\boxed{f\left[(a+ib)\times(a'+ib')\right] = f(a+ib)\times f(a'+ib')}$

اذن f تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

لكل مصفوفة M من E^* يوجد زوج وحيد (a,b) من $\mathbb{R}^2$

بحيث $M = aI + bJ$ (لان (I,J) أساس في E) أي $M = f(a+ib)$

و بما أن M غير منعدمة

فانه $\exists ! z = a + ib \in \mathbb{C}^* : f(z) = M(a,b)$ $\quad \left(\forall M \in E^*\right)$

اذن f تقابل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

و منه f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

3 - بما أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي فان $(E,+)$ زمرة تبادلية

لنبين أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية

لدينا $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية و بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

فان $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية

بما أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $M_2(\mathbb{R})$
فان الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في E
و بالتالي $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

4 لنحل في E المعادلة $J\times X^3=I$

- طريقة 1 : لدينا $J=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$ اذن $J^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$

المعادلة $J\times X^3=I$ تكافىء $X^3=J^{-1}$

اذن $f^{-1}(X^3)=f^{-1}(J^{-1})$ أي $(f^{-1}(X))^3=f^{-1}(J^{-1})$

لدينا $f(-i)=M(0,-1)=J^{-1}$ اذن $f^{-1}(J^{-1})=-i$

و لدينا $f(a+ib)=M(a,b)$ اذن $f^{-1}(M(a,b))=a+ib$

بما أن X عنصر من E فان المعادلة $J\times X^3=I$ تصبح : $(a+ib)^3=-i$

ليكن $a+ib=re^{i\theta}$

$$(a+ib)^3=-i\Leftrightarrow r^3e^{3i\theta}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\\ \theta=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\end{cases}\qquad /k\in\{0,1,2\}$$

اذن $z_0=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; $z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$; $z_2=e^{i\frac{7\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

اذن مجموعة حلول المعادلة $J\times X^3=I$ هي $S=\left\{M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right);M(0,1);M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$$S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}I-\frac{1}{2}J;J;-\frac{\sqrt{3}}{2}I-\frac{1}{2}J\right\}$$

- طريقة 2 :

بما أن X عنصر من E و (I,J) أساس في الفضاء المتجهي E فان : $X=aI+bJ$

لدينا $X^3=a^3I+3a^2bJ+3ab^2J^2+b^3J^3$ و لدينا $J^2=-I$ و $J^3=-J$

اذن $X^3=a^3I+3a^2bJ-3ab^2I-b^3J$

$$J.X^3=I\Leftrightarrow a^3J+3a^2bJ^2-3ab^2J-b^3J^2=I$$
$$\Leftrightarrow a^3J-3a^2bI-3ab^2J+b^3I=I$$
$$\Leftrightarrow (b^3-3a^2b)I+(a^3-3ab^2)J=I$$

بما أن (I,J) أساس في الفضاء المتجهي E فإن $\begin{cases}b^3-3a^2b=1 & (1)\\ a^3-3ab^2=0 & (2)\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow a=0$ أو $a^2=3b^2$

اذا كان $a=0$ فان $b^3=1$ أي $b=1$ إذن $X=J$ حل للمعادلة المقترحة

اذا كان $a^2=3b^2$ فان $-8b^3=1$ أي $b^3=-\frac{1}{8}$ أي $b=-\frac{1}{2}$

اذن $a^2=\frac{3}{4}$ أي $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

اذن $X=\frac{\sqrt{3}}{2}I-\frac{1}{2}J$ و $X=-\frac{\sqrt{3}}{2}I-\frac{1}{2}J$ حلين للمعادلة المقترحة

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة $J\times X^3=I$

هي $S=\left\{J;\frac{\sqrt{3}}{2}I-\frac{1}{2}J;-\frac{\sqrt{3}}{2}I-\frac{1}{2}J\right\}$

التمرين الثاني

a عدد عقدي غير منعدم

I) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(G): iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$

1 - أ - لدينا $\Delta=(a+\bar{a}-i)^2+4i(\bar{a}+ia\bar{a})$

اذن $\Delta=a^2+\bar{a}^2+i^2+2a\bar{a}-2ai-2\bar{a}i+4i\bar{a}-4a\bar{a})$

اذن $\Delta=a^2+\bar{a}^2+i^2-2a\bar{a}-2ai+2\bar{a}i$

$\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$

ب - العدد $a-\bar{a}-i$ جذر مربع للعدد Δ .

لدينا $z_1=\dfrac{-a-\bar{a}+i+a-\bar{a}-i}{2i}$

اذن $z_1=\dfrac{-2\bar{a}}{2i}=\bar{a}i$

لدينا $z_2=\dfrac{-a-\bar{a}+i-a+\bar{a}+i}{2i}$

اذن $z_2=\dfrac{-2a+2i}{2i}=1+ai$

و بالتالي $S=\left\{\bar{a}i,1+ai\right\}$

2 - ليكن $a=\alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

اذا كان a حل للمعادلة *(G)* فان : $a=\bar{a}i$ أو $a=1+ai$ لان $\bar{a}i$ و $1+ai$ هما حلي للمعادلة *(G)*

$$\alpha+i\beta=i(\alpha-i\beta)\Rightarrow\alpha+i\beta=i\alpha+\beta$$
$$\Rightarrow\alpha=\beta$$
$$\alpha+i\beta=1+i(\alpha+i\beta)\Rightarrow\alpha+i\beta=1-\beta+i\alpha$$
$$\Rightarrow\quad\alpha=\beta\quad\text{و}\quad1-\beta=\alpha$$

اذن : اذا كان a حل للمعادلة *(G)* فان : $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$

عكسيا : اذا كان $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$ أي $\alpha=\beta$ فإن $a=\alpha+i\alpha$ و $\bar{a}=\alpha-i\alpha$

اذن $a+\bar{a}=2\alpha$ و $a\bar{a}=2\alpha^2$

لدينا $ia^2+(a+\bar{a}-i)a-\bar{a}-ia\bar{a}=i(\alpha+i\alpha)^2+(2\alpha-i)(\alpha+i\alpha)-\alpha+i\alpha-i(2\alpha^2)$

$$=-2\alpha^2+2\alpha^2+2i\alpha^2-i\alpha+\alpha-\alpha+i\alpha-2i\alpha^2$$
$$=0$$

اذن $a=\alpha+i\alpha$ حل للمعادلة *(G)*

و بالتالي : a حل للمعادلة *(G)* يكافىء $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$

II) 1 - نضع $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}$

لدينا $\bar{Z}=\dfrac{1-i\bar{a}-\bar{a}}{-ia-\bar{a}}$

اذن $\bar{Z}=\dfrac{i(\frac{1}{i}-\bar{a}-\frac{1}{i}\bar{a})}{i(-a-\frac{1}{i}\bar{a})}=\dfrac{-i-\bar{a}+i\bar{a}}{-a+i\bar{a}}$ و منه $\boxed{\bar{Z}=\dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}}$

ب - نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي a و $i\bar{a}$ و $1+ia$

النقط A و B و C مستقيمية يعني $\dfrac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow Z=\bar{Z}$$
$$\Leftrightarrow\dfrac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}=\dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$$

$$\Leftrightarrow 1+ia-a=i\bar{a}-\bar{a}-i$$
$$\Leftrightarrow i(a-\bar{a})-(a-\bar{a})=-(1+i)$$
$$\Leftrightarrow a-\bar{a}=\frac{1+i}{1-i}=i$$
$$\Leftrightarrow 2i\,Im(a)=i$$
$$\Leftrightarrow Im(a)=\frac{1}{2}$$

2 - نفترض أن $Im(a)\neq\frac{1}{2}$

أ - ليكن R دوران مركزه Ω ذات اللحق w وزاويته θ

اذا كانت $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالدوران R فان الكتابة العقدية للدوران R هي :

$$\frac{z'-w}{z-w}=e^{i\theta} \quad \text{أي} \quad z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$

$$R_1(B)=B'\Leftrightarrow\frac{b'-a}{i\bar{a}-a}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$$
$$\Leftrightarrow b'-a=(i\bar{a}-a)(-i)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{b'=\bar{a}+a+ia}$$

$$R_2(B)=C'\Leftrightarrow\frac{c'-a}{1+ia-a}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\Leftrightarrow c'-a=(1+ia-a)i$$
$$\Leftrightarrow \boxed{c'=i-ia}$$

ب - لنبين أن (AE) و $(B'C')$ متعامدان

لدينا E منتصف $[BC]$ اذن $z_E=\frac{z_B+z_C}{2}$ أي $z_E=\frac{1+ia+i\bar{a}}{2}$

لدينا $(\overline{\overline{AE},\overline{B'C'}})\equiv\arg(\frac{c'-b'}{z_E-a})[2\pi]$

و لدينا $\frac{c'-b'}{z_E-a}=\frac{i-ia-\bar{a}-a-ia}{\frac{1+ia+i\bar{a}}{2}-a}$

اذن $=\frac{2(i-ia-\bar{a}-a-ia)}{1+ia+i\bar{a}-2a}$

أي $=\frac{2(i-2ia-a-\bar{a})}{1+ia+i\bar{a}-2a}$

أي $=\frac{2i(1-2a+ia+i\bar{a})}{1+ia+i\bar{a}-2a}$

اذن $\boxed{\frac{c'-b'}{z_E-a}=2i}$

لدينا $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ اذن $\arg(\frac{c'-b'}{z_E-a})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ اذن $(\overline{\overline{AE},\overline{B'C'}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و بالتالي (AE) و $(B'C')$ متعامدان .

لدينا $\frac{c'-b'}{z_E-a}=2i$ اذن $\left|\frac{c'-b'}{z_E-a}\right|=|2i|$

أي $|c'-b'|=2|z_E-a|$ و منه $\boxed{B'C'=2AE}$

التمرين الثالث

I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E):35u-96v=1$

1 - لدينا $35(11)-96(4)=385-384$
$=1$

اذن الزوج $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E)

2 - لدينا $35u-96v=1$

$35(11)-96(4)=1$ اذن $35(u-11)=96(v-4)$

اذن 96 يقسم $35(u-11)$

وبما أن $35(11)-96(4)=1$ فان العددين 35 و 96 أوليان فيما بينهما

اذن حسب مبرهنة $Gauss$ 96 يقسم $u-11$

اذن يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث $u-11=96k$ اي $\boxed{u=11+96k}$

لدينا $35(11+96k-11)=96(v-4)$ اذن $\boxed{v=4+35k}$

لنتحقق أن الزوج $(11+96k,4+35k)$ حل للمعادلة (E)

لدينا $35(11+96k)-96(4+35k)=1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\{(11+96k,4+35k)/k\in\mathbb{Z}\}$

II) نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلة $(F): x^{35}\equiv 2[97]$

أ - لدينا $\sqrt{97}\simeq 9.84$ و 97 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية 2 , 3 , 5 , 7

اذن العدد 97 أولي

لدينا $x^{35}\equiv 2[97]$ اذن يوجد k من $\mathbb{N}$ بحيث $x^{35}=2+97k$ أي $x^{35}-97k=2$

ليكن $d=x\wedge 97$

لدينا d/x و $d/97$ اذن d/x^{35} و $d/97k$ أي $d/x^{35}-97k$ أي $d/2$

اذن $d=1$ أو $d=2$

و بما أن 97 فردي فان العدد 2 لا يمكن أن يكون قاسما للعدد 97

اذن $d=1$

و بالتالي x و 97 أوليان فيما بينهما

ب - لدينا $x\wedge 97=1$ و بما أن 97 أولي فانه حسب مبرهنة $Fermat$ الصغرى

اذن $x^{97-1}\equiv 1[97]$

ومنه $\boxed{x^{96}\equiv 1[97]}$

ج - لدينا x حل للمعادلة (F)

اذن $x^{35}\equiv 2[97]$ أي $(x^{35})^{11}\equiv 2^{11}[97]$ أي $x^{35(11)}\equiv 2^{11}[97]$

حسب السؤال I) - 1) لدينا $35(11)=96(4)+1$ اذن $x^{96(4)+1}\equiv 2^{11}[97]$ أي $(x^{96})^4x\equiv 2^{11}[97]$

و بما أن $x^{96}\equiv 1[97]$ فان $\boxed{x\equiv 2^{11}[97]}$

2 - لدينا $x\equiv 2^{11}[97]$ اذن $x^{35}\equiv 2^{35.11}[97]$ اذن $x^{35}\equiv 2^{(96.4)+1}[97]$ أي $x^{35}\equiv (2^{96})^4.2[97]$

لدينا $2\wedge 97=1$ و 97 عدد أولي

اذن حسب مبرهنة $Fermat$ $2^{97-1}\equiv 1[97]$ أي $2^{96}\equiv 1[97]$ اذن $2^{35}\equiv 2[97]$

و بالتالي x حل للمعادلة (F)

3 - حسب س 1- ج) و 2 - نستنتج أن x حل للمعادلة (F) يكافىء : $x\equiv 2[97]$

لدينا $2^{11}=(2^5)^2.2=32^2.2$ أي $2^{11}\equiv 108[97]$ أي $2^{11}\equiv 11[97]$ اذن $x\equiv 11[97]$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (F) هي $S=\{11+97k/k\in\mathbb{N}\}$

<u>التمرين الرابع</u>

$$f(x)=2x-e^{-x^2}$$

I) أ - $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}-e^{-x^2}=0$

اذن المستقيم ذو المعادلة $y=2x$ مقارب للمنحنى (Cf) بجوار $(+\infty)$

ب- $f'(x)=2+2xe^{-x^2}$ $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$

لكل x من $\mathbb{R}^+$ $f'(x)>0$

اذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

x	0 $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 0 \nearrow +\infty$

ج - f دالة متصلة على $\mathbb{R}^+$ لأنها مجموع و مركب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^+$

بما أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ فإن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $[-1,+\infty[$

لدينا $0 \in [-1,+\infty[$ اذن 0 يقبل سابقا وحيدا $\alpha \in [0,+\infty[$

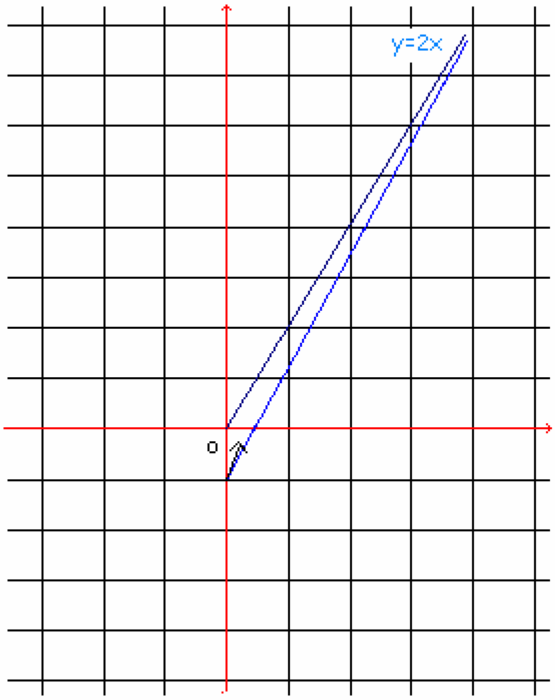
لدينا $f(0)=-1$ و $f(1)=2-\frac{1}{e}$ اذن $f(0).f(1)<0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $0<\alpha<1$

د - من خلال جدول تغيرات f نستنتج أن :

$f(x)\geq 0$ لكل x من $[\alpha,+\infty[$

$f(x)<0$ لكل x من $[0,\alpha[$



II) 1 - أ -

طريقة 1 : لتكن $h(x)=e^{-x^2}$

h متصلة على $[0,x]$ $(x>0)$

حسب مبرهنة المتوسط $\exists c \in]0,x[: h(c)=\frac{1}{x-0}\int_0^x h(t)dt$ أي $h(c)=\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$

اذن $\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-c^2}$

طريقة 2 : يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $F : a \to \int_0^a e^{-t^2}dt$

لدينا F متصلة على $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,x[$

اذن $\exists c \in]0,x[: \frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(c)$

لدينا $F'(a)=e^{-a^2}$ اذن $F'(c)=e^{-c^2}$

و بالتالي $\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$

ب - لدينا $0<c<x$ اذن $-x^2<-c^2<0$ أي $e^{-x^2}<e^{-c^2}<1$

اذن $\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt<1$ أي $\int_0^x e^{-t^2}dt<x$ (لان $x>0$)

من أجل $x=1$ لدينا $\boxed{\int_0^1 e^{-t^2}dt<1}$

2 - أ - لدينا $g(\alpha)=\alpha^2-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt$ اذن $g(\alpha)=\alpha^2-\int_0^\alpha (2t-e^{-t^2})dt$ ومنه $\boxed{g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt}$

ب - الدالة $h:t\to e^{-t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

اذن h تقبل دالة أصلية Ψ على $\mathbb{R}^+$ بحيث Ψ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و $\Psi'(x)=h(x)=e^{-x^2}$

لدينا $g(x)=x^2-[\Psi(t)]_0^x=x^2-\Psi(x)+\Psi(0)$

الدالة $x\to x^2$ ق . ش على $\mathbb{R}^+$ اذن g ق . ش على $\mathbb{R}^+$ لانها مجموع دوال ق . ش على $\mathbb{R}^+$

$g'(x)=2x-\psi'(x)=2x-e^{-x^2}$ $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$ اذن $\boxed{g'(x)=f(x)}$

ج - g متصلة على $\mathbb{R}^+$ اذن g متصلة على $[\alpha,1]$

بما أن $f(x)>0$ لكل x من $]\alpha,+\infty[$ فان $g'(x)>0$ لكل x من $[\alpha,1]$

اذن g تزايدية قطعا على $[\alpha,1]$

لدينا $g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt$ وبما أن $f(x)<0$ لكل x من $[0,\alpha[$ فان $\int_0^\alpha f(t)dt<0$ أي $g(\alpha)<0$

لدينا $g(1)=1-\int_0^1 e^{-t^2}dt$ وبما أن $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$ فان $1-\int_0^1 e^{-t^2}dt>0$ أي $g(1)>0$

اذن $g(\alpha).g(1)<0$ اذن حسب مبرهنة القيم الوسطية $\exists!\beta\in]\alpha,1[:g(x)=0$

3 - أ - لنبين أن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\varphi(x)=\varphi(0)$

لدينا $\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$ اذن $\varphi(x)=e^{-c^2}$

وبما أن $0<c<x$ فان $-x^2<-c^2<0$ اذن $1<e^{-c^2}<e^{-x^2}$ أي $1<\varphi(x)<e^{-x^2}$

لدينا $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{-x^2}=1$ اذن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\varphi(x)=1=\varphi(0)$ وبالتالي φ متصلة على يمين 0

ب - $\begin{cases}u(t)=e^{-t^2}\\v'(t)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(t)=-2te^{-t^2}\\v(t)=t\end{cases}$

لدينا $\varphi(x)=\frac{1}{x}\left(\left[te^{-t^2}\right]_0^x+\int_0^x 2t^2e^{-t^2}dt\right)$ اذن $\boxed{\varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt}$

ج - لدينا $\varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

الدالة $f_1:t\to t^2e^{-t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ اذن f_1 تقبل دالة أصلية ψ_1 بحيث ψ_1 ق . ش على $\mathbb{R}^+$ و $\psi'_1(x)=f_1(x)$

الدالة $x\to e^{-x^2}$ ق . ش على $\mathbb{R}^+$ و الدالة $x\to\frac{2}{x}$ ق . ش على $\mathbb{R}^{*+}$

لدينا $\varphi(x)=e^{-x^2}+[\psi_1(t)]_0^x$ اذن $\varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}(\psi_1(x)-\psi_1(0))$

اذن φ ق . ش على $\mathbb{R}^{*+}$ لأنها مجموع و جداء و مركب دوال ق . ش على $\mathbb{R}^{*+}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \qquad \varphi'(x) = -2xe^{-x^2} - \frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt + \frac{2}{x}x^2e^{-x^2}$$

و بالتالي $\boxed{\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt}$

د - لدينا φ متصلة و تناقصية قطعا على $[0,1]$ اذن $\varphi(1) \le \varphi(x) \le \varphi(0)$ $(\forall x \in [0,1])$

لدينا $\varphi(0) = 1$ و $\varphi(1) = \int_0^1 e^{-t^2}dt > 0$ اذن $0 \le \varphi(x) \le 1$ و منه $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

4 - أ - لدينا $0 \le t \le x$ اذن $-x^2 \le -t^2 \le 0$ أي $e^{-x^2} \le e^{-t^2} \le 1$

اذن $\int_0^x t^2e^{-t^2}dt \le \int_0^x t^2dt$ أي $\int_0^x t^2e^{-t^2}dt \le \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x$ ومنه $\int_0^x t^2e^{-t^2}dt \le \frac{1}{3}x^3$

ب - لدينا $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ اذن $|\varphi'(x)| \le \frac{2}{x^2}\int_0^x \left|t^2e^{-t^2}\right|dt$ اذن $|\varphi'(x)| \le \frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

وبما أن $\int_0^x t^2e^{-t^2}dt \le \frac{1}{3}x^3$ فان $|\varphi'(x)| \le \frac{2}{3}x$ و بالتالي $|\varphi'(x)| \le \frac{2}{3}$ $(\forall x \in]0,1[)$

ج - لنبين أن $\varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \qquad \varphi(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt = x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x e^{-t^2}dt = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \int_0^x e^{-t^2}dt = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0$$

5 - $\begin{cases} U_0 = \frac{2}{3} \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$

أ - لنبين بالترجع أن $0 \le U_n \le 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

من أجل *n=0* لدينا $U_0 = \frac{2}{3}$ اذن $0 \le U_0 \le 1$

نفترض أن $0 \le U_n \le 1$ و نبين أن $0 \le U_{n+1} \le 1$

لدينا حسب س 3 - د $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

$$0 \le U_n \le 1 \Rightarrow 0 \le \varphi(U_n) \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le 1$$

و بالتالي $0 \le U_n \le 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب - لدينا φ متصلة على المجال المغلوق الذي طرفاه β و U_n . و ق. ش على المجال المفتوح الذي طرفاه β و U_n

اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد β محصور بين β و U_n بحيث $|\varphi(U_n) - \varphi(\beta)| = |\varphi'(c)||U_n - \beta|$

حسب س 2 - ج - لدينا $g(\beta) = 0$ و حسب س 4 - ج - $\varphi(\beta) = \beta \Leftrightarrow g(\beta) = 0$

و لدينا $U_{n+1} = \varphi(U_n)$

اذن $|U_{n+1} - \beta| = |\varphi'(c)||U_n - \beta|$

لدينا $|\varphi'(x)| \le \frac{2}{3}$ $(\forall x \in]0,1[)$

اذن $|\varphi'(c)| \le \frac{2}{3}$

اذن $|U_{n+1}-\beta| \le \frac{2}{3}|U_n-\beta|$

$$|U_n-\beta| \le \frac{2}{3}|U_{n-1}-\beta|$$

$$|U_{n-1}-\beta| \le \frac{2}{3}|U_{n-2}-\beta|$$

.

.

.

.

.

$$|U_1-\beta| \le \frac{2}{3}|U_0-\beta|$$

بضرب أطراف المتفاوتات طرفا لطرف و بعد الاختزال نجد :

$$|U_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0-\beta|$$

لدينا $0 \le U_0 \le 1$ و $0<\alpha<\beta<1$.

اذن $-1<-\beta<0$

اذن $-1<U_0-\beta<1$ أي $|U_0-\beta| \le 1$

و بالتالي $|U_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ملاحظة : يمكن أن نبين بالترجع أن : $|U_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج - المتتالية $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متقاربة و نهايتها 0 (لأن $0<\frac{2}{3}<1$)

اذن حسب مصاديق التقارب المتتالية (U_n) متقاربة

و $\boxed{\lim_{x\to+\infty} U_n = \beta}$.

بعثـه : ياسر غريز