| الثانية بكالوريا علوم رياضية<br>الرياضيات | تصحيح الامتحان الوطني<br>الموحد للبكالوريا<br>الدورة العادية 2007 | الأستاذ : الحيان |
|---|---|---|

## التمرين الأول :

I. ليكن $E=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لدينا : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}\quad:\quad\forall(a,b)\in E^2$ .

1. أ- ليكن $(a,b)\in E^2$ . لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2ab+1-a\sqrt{2}-b\sqrt{2}\right)=a+b-ab\sqrt{2}=a\perp b$$

ب- ليكن $(a,b)\in E^2$ . لدينا : $a\in E\Leftrightarrow a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a\sqrt{2}-1\neq 0$ و $b\in E\Leftrightarrow b\sqrt{2}-1\neq 0$ . إذن :

$\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)\neq 0$ ومنه فإن: $a\perp b-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)\neq 0$ أي: $a\perp b\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه فإن : $a\perp b\in E$ . وبالتالي فإن : $a\perp b\in E\quad:\quad\forall(a,b)\in E^2$ .

إذن $\perp$ قانون تركيب داخلي في $E$ .

2. لدينا : $\perp$ قانون تركيب داخلي في $E$ .

وبما أن الجمع والضرب قانونين تبادليين وتجميعيين في $\mathbb{R}$ ، فإن $\perp$ قانون تبادلي وتجميعي في $E$ .

لدينا : $0\perp a=a$ و $a\perp 0=a\quad:\quad\forall a\in E$ . إذن $0$ هو العنصر المحايد بالنسبة ل $\perp$ في $E$ .

ليكن $(a,b)\in E^2$ . لدينا :

$$\begin{aligned}
a\perp b=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)=1\\
&\Leftrightarrow b\sqrt{2}-1=\frac{1}{a\sqrt{2}-1}\\
&\Leftrightarrow b\sqrt{2}=\frac{1}{a\sqrt{2}-1}+1\\
&\Leftrightarrow b\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}-1}\\
a\perp b=0 &\Leftrightarrow \boxed{b=\frac{a}{a\sqrt{2}-1}}
\end{aligned}$$

وبما أن : $b=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{a}{a\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a\sqrt{2}=a\sqrt{2}-1\Leftrightarrow 0=-1$ وهذا غير ممكن، فإن : $b\in E$

وبالتالي فإن لكل $a\in E$ مماثل وحيد $b=\frac{a}{a\sqrt{2}-1}$ في $E$ بالنسبة للقانون $\perp$ .

وبالتالي فإن : $(E,\perp)$ زمرة تبادلية .

II. نعلم أن : $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

وأن : $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ فضاء متجهي حقيقي .

$\mathscr{F}$ مجموعة المصفوفات من $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على شكل $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a&a\\a&\sqrt{2}-a\end{pmatrix}$ حيث $a\in E$.

نضع : $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ .

1. أ- لدينا : $-2A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=A^2$ . $\boxed{A^2=-2A}$

ولدينا : $M(a)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=I+\dfrac{a}{\sqrt{2}}A$ . $\boxed{M(a)=I+\dfrac{a}{\sqrt{2}}A}$

ب- ليكن $(a,b)\in E^2$ . لدينا : $M(a)\times M(b)=\left(I+\dfrac{a}{\sqrt{2}}A\right)\times\left(I+\dfrac{b}{\sqrt{2}}A\right)=I+\dfrac{ab}{2}A^2+\dfrac{a}{\sqrt{2}}A+\dfrac{b}{\sqrt{2}}A$

$$M(a)\times M(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\times\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)=I-abA+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{b}{\sqrt{2}}A=I+\frac{a+b-ab\sqrt{2}}{\sqrt{2}}A$$

$$M(a)\times M(b)=I+\frac{a\perp b}{\sqrt{2}}A=M(a\perp b)$$

إذن : $\boxed{M(a)\times M(b)=M(a\perp b)}$ و $a\perp b\in E$ ( حسب السؤال I.1.ب )

ومنه فإن : $M(a)\times M(b)=M(a\perp b)\in\mathscr{F}$ . إذن $\mathscr{F}$ جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ .

2. نعتبر التطبيق :

$$\begin{array}{cccc}\varphi & : & (E,\perp) & \to & (\mathscr{F},\times)\\ & & a & \mapsto & \varphi(a)=M(a)\end{array}$$

أ- ليكن $(a,b)\in E^2$ . لدينا : $\varphi(a\perp b)=M(a\perp b)=M(a)\times M(b)=\varphi(a)\perp\varphi(b)$ .

إذن : $\varphi$ تشاكل من $(E,\perp)$ نحو $(\mathscr{F},\times)$.

ليكن $B\in\mathscr{F}$ ، إذن : $\exists a\in E\ \ /\ \ B=M(a)$. إذن : $\exists a\in E\ \ /\ \ B=\varphi(a)$ .

وعليه فإن $\varphi$ شمولي من $E$ نحو $\mathscr{F}$ .

ولدينا : $\varphi(a)=\varphi(b)\Rightarrow M(a)=M(b)\Rightarrow I+\dfrac{a}{\sqrt{2}}A=I+\dfrac{b}{\sqrt{2}}A\Rightarrow\dfrac{a}{\sqrt{2}}A=\dfrac{b}{\sqrt{2}}A\Rightarrow a=b$

إذن : $\varphi$ تبايني من $E$ نحو $\mathscr{F}$.

وبالتالي فإن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(E,\perp)$ نحو $(\mathscr{F},\times)$.

ب- بما أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(E,\perp)$ نحو $(\mathscr{F},\times)$ و $(E,\perp)$ زمرة تبادلية ، فإن $(\mathscr{F},\times)$ زمرة تبادلية.

## التمرين 2 :

ليكن $a\in\mathbb{C}-\{-i,i\}$ .

I. 1. أ- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$ . ليكن : $u=a+i$ . لدينا :

$$\begin{aligned}u^2-(1+a)(1+i)u+(1+a^2)i &= (a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+(1+a^2)i\\ &= a^2+2ai-1-(1+a)(a+i+ai-1)+i+a^2i\\ &= a^2+2ai-1-a-i-ai+1-a^2-ai-a^2i+1+i+a^2i\\ u^2-(1+a)(1+i)u+(1+a^2)i &= 0\end{aligned}$$

إذن : $u=a+i$ حل للمعادلة $(E)$ .

ب- ليكن $v$ الحل الآخر للمعادلة $(E)$ . لدينا :

$$u+v=-\frac{b}{a}=(1+a)(1+i) \Rightarrow v=(1+a)(1+i)-u$$
$$\Rightarrow v=(1+a)(1+i)-(a+i)$$
$$\Rightarrow v=1+i+a+ai-a-i$$
$$\Rightarrow \boxed{v=1+ai}$$

2. نفترض أن : $|a|=1$ . إذن : $a\bar{a}=|a|^2=1$ ، ومنه فإن : $\boxed{\bar{a}=\frac{1}{a}}$ .

أ- بما أن : $\frac{u}{v}=\frac{a+i}{1+ai}=\frac{i(1-ai)}{i(a-i)}=\frac{1-ai}{a-i}=\frac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{i}{a}}=\frac{\bar{a}-i}{1-\bar{a}i}=\frac{\overline{a+i}}{\overline{1+ai}}=\frac{\bar{u}}{\bar{v}}=\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}$ ، فإن : $\boxed{\frac{u}{v}\in\mathbb{R}}$ .

ب- لدينا : $u^2=(a+i)^2=a^2-1+2ai=a^2-a\bar{a}+2ai=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]$. $\boxed{u^2=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]}$

جـ- لدينا : $\arg(u^2)\equiv 2\arg(u)[2\pi]$ و لدينا : $\arg(u^2)\equiv\arg\left(a\left[(a-\bar{a})+2i\right]\right)[2\pi]$

$$\equiv\arg(a)+\arg\left((a-\bar{a})+2i\right)[2\pi]$$

ولدينا : $(a-\bar{a})+2i=2i\,\Im m(a)+2i=2\left(\Im m(a)+1\right)i$.

ولدينا : $|\Im m(a)|\le|a|\Rightarrow|\Im m(a)|\le 1\Rightarrow -1\le\Im m(a)\le 1\Rightarrow 0\le\Im m(a)+1\le 2$.

ومنه فإن : $(a-\bar{a})+2i=\left[2\left(\Im m(a)+1\right),\frac{\pi}{2}\right]$ . إذن : $\arg\left((a-\bar{a})+2i\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

وعليه فإن : $\arg(u^2)\equiv\arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$ . أي : $2\arg(u)\equiv\arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

وبالتالي فإن : $\boxed{\arg(u)\equiv\frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]}$ .

3. **<u>طريقة 1 :</u>**

لدينا: $|u+iv|\le|u|+|iv|=|u|+|v|$، و $u+iv=a+i+i(1+ai)=2i$. ومنه فإن $|u+iv|=|2i|=2$

وبالتالي فإن : $\boxed{|u|+|v|\ge 2}$ .

**<u>طريقة 2 :</u>**

لدينا: $|a|=1$ . إذن : $a\bar{a}=1$ ومنه فإن :

$$|u|+|v|=|a+i|+|1+ai|=|a+i|+|a\bar{a}+ai|=|a+i|+|a||\bar{a}+i|=|a+i|+|\bar{a}+i|\ge|a+i+\bar{a}+i|$$

ولدينا : $a+i+\bar{a}+i=a+\bar{a}+2i=2\Re e(a)+2i=2\left(\Re e(a)+i\right)$ .

إذن : $|a+i+\bar{a}+i|=2|\Re e(a)+i|=2\sqrt{\left(\Re e(a)\right)^2+1}$ .

وبما أن :

$$\left|\Re e(a)\right|\le|a| \Rightarrow \left|\Re e(a)\right|\le 1$$
$$\Rightarrow -1\le\Re e(a)\le 1$$
$$\Rightarrow 0\le\left(\Re e(a)\right)^2\le 1$$
$$\Rightarrow 1\le 1+\left(\Re e(a)\right)^2\le 2$$
$$\Rightarrow 1\le\sqrt{1+\left(\Re e(a)\right)^2}$$
$$\left|\Re e(a)\right|\le|a| \Rightarrow 2\le 2\sqrt{1+\left(\Re e(a)\right)^2}$$
$$\Rightarrow 2\le\left|a+i+\bar{a}+i\right|$$

إذن : $|u|+|v|\ge\left|a+i+\bar{a}+i\right|$ و $\left|a+i+\bar{a}+i\right|\ge 2$ ، ومنه نستنتج أن :

$$\boxed{|u|+|v|\ge 2}$$

II. المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ . ليكن $m\in\left]2,+\infty\right[$ .

نعتبر $(E_m)$ مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي $\mathcal{P}$ بحيث : $|u|+|v|=m$ .

1. نعلم أن : $|u|+|v|=|a+i|+|a-i|$ .

لتكن $F(i)$ و $F'(-i)$ نقطتين من المستوى العقدي $\mathcal{P}$ اللتان لحقاهما على التوالي $i$ و $-i$ .

لدينا : $|u|+|v|=m \Leftrightarrow |a+i|+|a-i|=m \Leftrightarrow MF+MF'=m$ .

وبما أن المسافة البؤرية $FF'=\left|z_{F'}-z_F\right|=|-i-i|=|-2i|=2$ و $m=|u|+|v|\ge 2$ ، فإن :

$m=2b\ge 2c$ . إذن : $(E_m)$ إهليلج مركزه منتصف القطعة $[FF']$ أي $O$ أصل المعلم .

2. نضع : $a=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ .

أ- لدينا :

$$M(a)\in(E_m) \Leftrightarrow |u|+|v|=m$$
$$\Leftrightarrow MF+MF'=m$$

نعلم أن : $F(0,1)$ و $F'(0,-1)$ و $M(x,y)$ ،

إذن : $\overrightarrow{MF}(-x,1-y)$ و $\overrightarrow{MF'}(-x,-1-y)$ .

ومنه فإن : $MF^2=x^2+(1-y)^2$ و $MF'^2=x^2+(1+y)^2$ .

إذن : $MF^2-MF'^2=-4y$ ، ومنه $(MF-MF')(MF+MF')=-4y$ ،

وبما أن : $MF+MF'=m$ ،

فإن : $m(MF-MF')=-4y$ .

أي : $MF-MF'=-\dfrac{4}{m}y$ .

$$\begin{array}{rcl} MF+MF' & = & m \\ (+) & & \\ MF-MF' & = & -\frac{4}{m}y \\ \hline 2MF & = & m-\frac{4}{m}y \end{array}$$

وعليه فإننا نجد :

إذن : $MF=\frac{m}{2}-\frac{2}{m}y$ . ومنه فإن : $MF^2=\left(\frac{m}{2}-\frac{2}{m}y\right)^2=\frac{m^2}{4}-2y+\frac{4}{m^2}y^2$

و بما أن $MF^2=x^2+(1-y)^2$ ، فإن : $\frac{m^2}{4}-2y+\frac{4}{m^2}y^2=x^2+(1-y)^2$ .

أي : $\frac{m^2}{4}-2y+\frac{4}{m^2}y^2=x^2+1-2y+y^2$ يكافئ $\frac{m^2}{4}+\frac{4}{m^2}y^2=x^2+1+y^2$.

وبالتالي فإن معادلة ديكارتية للإهليلج $(E_m)$ هي : $\boxed{x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1}$ .

**طريقة أخرى :**

نعلم أن معادلة ديكارتية للإهليلج $(E_m)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ تكتب على شكل :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أي $x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2$ و $2b=m\Rightarrow b=\frac{m}{2}$ و $c=\frac{FF'}{2}=\frac{2}{2}=1$ .

إذن : $c^2=b^2-a^2\Rightarrow a^2=b^2-c^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2-1^2=\frac{m^2}{4}-1$ .

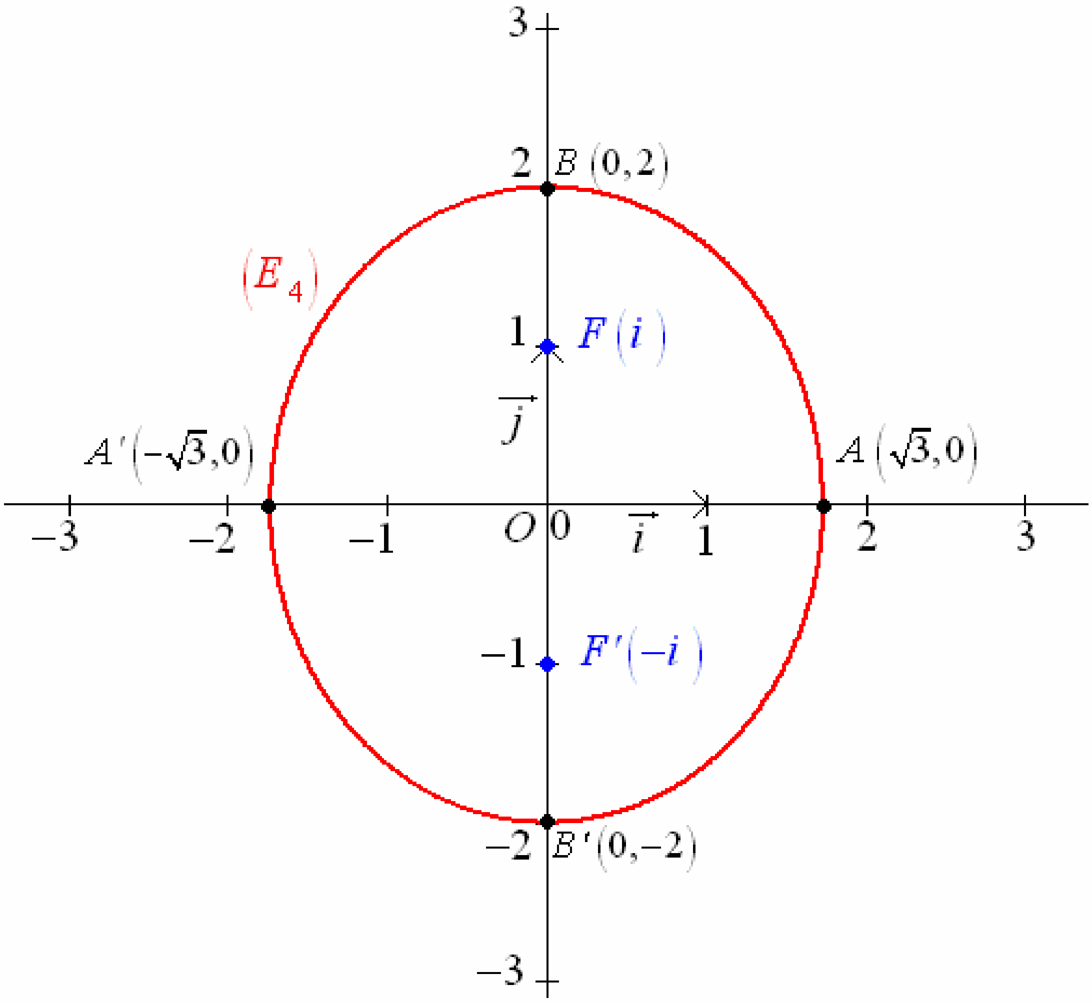
وبالتالي فإن ديكارتية للإهليلج $(E_m)$ هي : $\boxed{x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1}$.

ب- لدينا : $(E_4)\ :\ x^2+\frac{3}{4}y^2=3$ . إذن : $(E_4)\ :\ \frac{x^2}{\sqrt{3}^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$.

إذن : $a=\sqrt{3}$ و $b=2$ . ومنه فإن : $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=1$ .

ومنه فإن $(E_4)$ إهليلج :

- مركزه $O$ .
- رؤوسه $A(\sqrt{3},0)$ و $A'(-\sqrt{3},0)$ و $B(0,2)$ و $B'(0,-2)$ .
- بؤرتيه $F(0,1)$ و $F'(0,-1)$.
- تباعده المركزي $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$ .




3. <u>**طريقة 1 :**</u>

معادلة الإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ : $\boxed{x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7}} \Leftrightarrow x^2+\left(1-\frac{4}{\frac{8^2}{7}}\right)y^2=\frac{\frac{8^2}{7}}{4}-1$ .

معادلة المستقيم $(AB)$ هي : $\boxed{y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2} \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{y-0}{2} \Leftrightarrow \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ .

لنحدد تقاطع المستقيم $(AB)$ والإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ بحل النظمة : $(*):\begin{cases} x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7} \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases}$ .

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{7}{4}x^2-\frac{3}{2}\sqrt{3}x+\frac{9}{4}=\frac{9}{7} \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 49x^2-42\sqrt{3}x+27=0 \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (7x-3\sqrt{3})^2=0 \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases}$$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{3\sqrt{3}}{7} \\ y=\frac{8}{7} \end{cases}$$

ومنه فإن المستقيم $(AB)$ والإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ يتقاطعان وفق النقطة $\Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)$ .

نعلم أن معادلة المماس للإهليلج $x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7}$ : $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\Omega$ هي :

$$xx_0+\frac{9}{16}yy_0=\frac{9}{7} \Leftrightarrow x\frac{3\sqrt{3}}{7}+\frac{9}{16}y\frac{8}{7}=\frac{9}{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{7}\sqrt{3}x+\frac{9}{14}y=\frac{9}{7}$$
$$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{3}y=2\sqrt{3}$$

وبالتالي فإن المستقيم $(AB)$ مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)$ .

**طريقة 2 :**

معادلة الإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ :

$$x^2+\left(1-\frac{4}{\frac{8^2}{7}}\right)y^2=\frac{\frac{8^2}{7}}{4}-1 \Leftrightarrow x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{16}{7}-\frac{16}{9}x^2}$$

نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة بما يلي : $g(x)=\sqrt{\frac{16}{7}-\frac{16}{9}x^2}$ : $\forall x\in\left[-\frac{3\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7}\right]$ .

معادلة $(AB)$ هي : $\frac{x-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{y-0}{2} \Leftrightarrow \boxed{y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2}$ .

$(AB)$ مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ ، إذا وجد عدد حقيقي $x\in\left]-\frac{3\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7}\right[$ بحيث : $g'(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

أو $-g'(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

لدينا : $g'(x)=-\frac{16}{9}\frac{x}{\sqrt{\frac{16}{7}-\frac{19}{9}x^2}}$ و $g'(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{3}}{7}$ ومنه $y=g\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)=\frac{8}{7}$ .

لدينا : $\Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)\in\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$

ولدينا معادلة المماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\Omega$ تحدد بما يلي :

$$x\frac{3\sqrt{3}}{7}+\frac{9}{16}y\frac{8}{7}=\frac{9}{7} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x+\frac{9}{2}y=9 \Leftrightarrow y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2$$

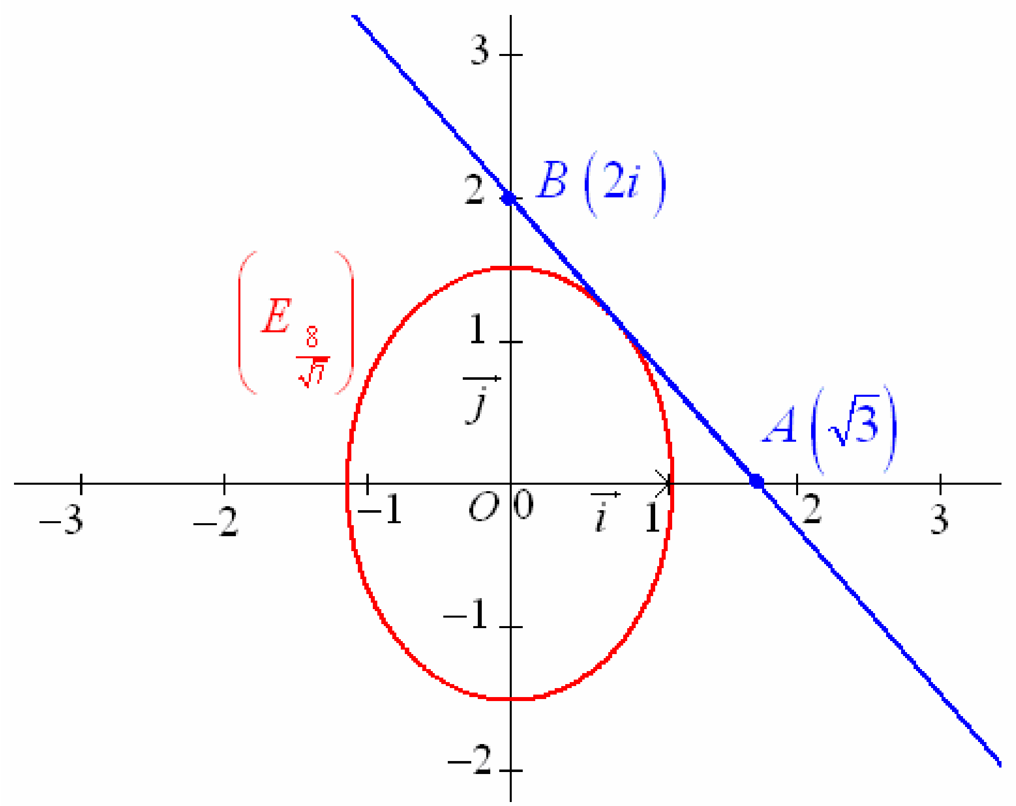
وهي المعادلة المختصرة للمستقيم $(AB)$ .

وبالتالي فإن $(AB)$ مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ .

ولدينا : $x=-\frac{3\sqrt{3}}{7} \Leftrightarrow -g'(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ومنه $y=-g\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)=-\frac{8}{7}$ .

إذن : $\Omega'\left(-\frac{3\sqrt{3}}{7},-\frac{8}{7}\right)\in\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ و لدينا معادلة المماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\Omega$ هي :

$-x\frac{3\sqrt{3}}{7}-\frac{9}{16}y\frac{8}{7}=\frac{9}{7} \Leftrightarrow -3\sqrt{3}x-\frac{9}{2}y=9 \Leftrightarrow y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x-2$ . هذه المعادلة ليست المعادلة المختصرة للمستقيم $(AB)$، إنما هي المعادلة المختصرة للمستقيم الموازي ل $(AB)$ والمار من $\Omega'$ .




## التمرين الثالث :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E) \quad : \quad 195x-232y=1$ .

أ- **طريقة 1 :** لدينا :

| | |
|---|---|
| 232 | 2 |
| 116 | 2 |
| 58 | 2 |
| 29 | 29 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 195 | 3 |
| 65 | 5 |
| 13 | 13 |
| 1 | |

إذن : $195=3\times5\times13$ و $232=2^3\times29$ .

ومنه فإن : $232\wedge195=1$ .

**طريقة 2 :** حسب تقنية القسمة الأقليدية المتتابعة لأقليدس ، لدينا :

$$\begin{array}{l|l} \times 58 & 232 = 195\times 1 + \cancel{37} \\ \times(-11) & 195 = \cancel{37}\times 5 + \cancel{10} \\ \times 3 & \cancel{37} = \cancel{10}\times 3 + \cancel{7} \\ \times(-2) & \cancel{10} = \cancel{7}\times 1 + \cancel{3} \\ \times 1 & \cancel{7} = \cancel{3}\times 2 + 1 \\ \hline & 3 = 1\times 3 + 0 \end{array}$$

$$58\times 232 - 11\times 195 = 58\times 195 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{58\times 232 - 69\times 195 = 1}$$

ومنه نستنتج أن $232\wedge 195 = 1$ . بالإظافة إلى معاملي Bezout.

ب- لدينا :

$$-\quad \begin{array}{lcl} 195x - 232y & = & 1 \\ 195\times(-69) + 232\times 58 & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$195(x+69) - 232(y+58) = 0$$

$$\Leftrightarrow 195(x+69) = 232(y+58) \quad (*)$$

إذن : $232 \;/\; x+69 \overset{Gauss}{\Longrightarrow} 232 \;/\; 195(x+69)$ . ومنه فإن : $\exists h\in\mathbb{R} \;/\; x+69 = 232h$

أي : $\exists h\in\mathbb{R} \;/\; x = -69 + 232h$ . نعوض هذا التعبير في العلاقة $(*)$ ، فنجد :

$y = -58 + 195h \Leftrightarrow 195h = y + 58 \Leftrightarrow 195\times 232h = 232(y+58)$ .

ومنه فإن : $(x,y) = (-69+232h, -58+195h)$ حيث $h\in\mathbb{Z}$ . أي :

$(x,y) = (-69+232+232(h-1), -58+195+195(h-1))$ .

يكافئ : $(x,y) = (163+232(h-1), 137+195(h-1))$ وبوضع $k = h-1$ ، نجد : $k\in\mathbb{Z}$ و

$(x,y) = (163+232k, 137+195k)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

وبما أن الأزواج $(163+232k, 137+195k)$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، تحقق المعادلة $(E)$ ، فإن مجموعة

حلول المعادلة $(E)$ هي : $S = \{(163+232k, 137+195k) \;/\; k\in\mathbb{Z}\}$

جـ- ليكن $d$ عددا صحيحا طبيعيا بحيث $0\le d\le 232$ و $195d \equiv 1[232]$.

لدينا : $\exists m\in\mathbb{Z} \;/\; 195d - 232m = 1$ . حسب السؤال 1.ب ، لدينا :

$\exists k\in\mathbb{Z} \;/\; (d,m) = (163+232k, 137+195k)$ . إذن : $\exists k\in\mathbb{Z} \;/\; d = 163+232k$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq d \leq 232 &\Leftrightarrow 0 \leq 163+232k \leq 232 \\ &\Leftrightarrow -163 \leq 232k \leq 69 \\ &\Leftrightarrow -\frac{163}{232} \leq k \leq \frac{69}{232} \end{aligned}$$

وبما أن : $k \in \mathbb{Z}$ و $\frac{69}{232} \approx 0,29$ و $-\frac{163}{232} \approx -0,70$ ، فإن : $k = 0$ . إذن : $\boxed{d = 163}$ .

.2 لدينا : $N = 233$ . $\qquad N = pq + r \;\; ; \;\; 0 \leq r < p$

| $p$ | $q$ | $r$ | $p^2$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 116 | 1 | 4 |
| 3 | 77 | 2 | 9 |
| 5 | 46 | 3 | 25 |
| 7 | 33 | 2 | 49 |
| 11 | 21 | 2 | 121 |
| 13 | 17 | 12 | 169 |
| 17 | 13 | 12 | 289 Stop |

إذن $N = 233$ عدد أولي .

نتوقف في حالة $q < p$ ( أو $p^2 > N$ ).

.3لتكن $A = [0,232] \cap \mathbb{N}$ . ليكن $f \;:\; A \to A$ تطبيقا يربط كل عنصر $a \in A$ بالعنصر $f(a)$ حيث $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد $a^{195}$ على 233 .

نقبل أن : $\boxed{\forall a \in A \setminus \{0\} \;:\; a^{232} \equiv 1[233]}$ .

مبرهنة فيرما : إذا كان $n$ عددا صحيحا طبيعيا أوليا ، فإن : $\boxed{\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;:\; a^{n-1} \equiv 1[n]}$

أ- ليكن $(a,b) \in A^2$ بحيث $f(a) = b$ . لدينا $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد $a^{195}$ على 233 .

إذن : $a^{195} \equiv f(a)[233]$ و $0 \leq f(a) < 233$. ومنه فإن : $a^{195} \equiv b[233]$ و $0 \leq b < 233$ .

ومنه فإن : $a^{195\times163} \equiv b^{163}[233]$ ولدينا : $195\times163 \equiv 1[232]$ . إذن : $195\times163 = 1+232k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ . إذن : $a^{1+232k} \equiv b^{163}[233]$ . نعلم أن : $a^{232} \equiv 1[233]$ ، إذن : $a^{232k} \equiv 1[233]$.

وعليه فإن : $a^{1+232k} \equiv 1[233]$ . إذن : $a \equiv b^{163}[233]$ و $0 \leq a \leq 232 < 233$ .

وبالتالي نستنتج أن $a$ هو باقي القسمة الأقليدية ل $b^{163}$ على 233 .

جـ- حسب 3.أ ، لدينا $f$ تقابل من $A$ نحو $A$ ولدينا $f^{-1} \;:\; A \to A$ هو التطبيق الذي يربط كل عنصر $b \in A$ بالعنصر $f(b)$ حيث $f(b)$ هو باقي القسمة الأقليدية ل $b^{163}$ على 233 .

## التمرين الرابع :

.I نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{aligned} g \;:\; \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = 1+(x-1)e^x \end{aligned}$$

.1 ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $g(x) = 1+(x-1)e^x = 1-e^x+xe^x$.

إذن : $g'(x) = \left(1+(x-1)e^x\right)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ . إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+(x-1)e^x = \boxed{+\infty}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1+xe^x - e^x = \boxed{1}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $1 \searrow$ | $0$ | $\nearrow +\infty$ |

0 قيمة دنيا مطلقة للدالة $g$ على $\mathbb{R}$ . إذن : $g(x)\geq 0 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}$ .

2. لدينا $g(0)=0$ . ولدينا :

$g$ تناقصية قطعا على $]-\infty,0[$ . إذن : $x<0\Rightarrow g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>0$ .

$g$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ . إذن : $x>0\Rightarrow g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>0$ .

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^* \quad : \quad g(x)>0}$ .

II. لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x-1} \quad ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e^x}}=\boxed{0}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x-1}=\dfrac{0}{0-1}=\boxed{0}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ .

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}}=1=f(0)$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ .

إذن $f$ متصلة في 0 .

3. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)'=\frac{x'(e^x-1)-x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-1-(x-1)e^x}{(e^x-1)^2}=-\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ هي إشارة $-g(x)$ . ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\boxed{+\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | | | $0$ |

4. ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ .

أ- نضع : $\begin{cases} u'(t)=e^{-t} \\ v(t)=t \end{cases}$ ، إذن : $\begin{cases} u(t)=-e^{-t} \\ v'(t)=1 \end{cases}$

لدينا : $u$ و $v$ متصلتان وقابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ . حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$J(x)=\int_0^x te^{-t}dt=\int_0^x u'(t)v(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)dt$$

$$J(x)=\left[-te^{-t}\right]_0^x-\int_0^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}-0-\left[e^{-t}\right]_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$

وبالتالي فإن : $\boxed{J(x)=e^{-x}\left(e^x-1-x\right)}$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ .

إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ ، فإن : $0\le t\le x \Rightarrow -x\le -t\le 0 \Rightarrow e^{-x}\le e^{-t}\le 1 \Rightarrow te^{-x}\le te^{-t}\le t$ .

إذن : $\int_0^x te^{-x}dt \le \int_0^x te^{-t}dt \le \int_0^x tdt \Rightarrow e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le J(x) \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \Rightarrow \frac{x^2}{2}e^{-x} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}$

ومنه فإن : $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ .

إذا كان $x \in \mathbb{R}^-$ ، فإن : $x\le t\le 0 \Rightarrow 0\le -t\le -x \Rightarrow 1\le e^{-t}\le e^{-x} \Rightarrow te^{-x}\le te^{-t}\le t$ ، لأن $t\le 0$ .

إذن: $\int_x^0 te^{-x}dt \le \int_x^0 te^{-t}dt \le \int_x^0 tdt \Rightarrow e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0 \le -J(x) \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2}e^{-x} \le -J(x) \le -\frac{x^2}{2}$

وعليه فإن : $\frac{x^2}{2} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-x}$ ، ومنه فإن : $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ .

هذه العلاقة تظل صحيحة من أجل $x=0$ .

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}}$

ج- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا : $J(x)=e^{-x}\left(e^x-1-x\right)$ و $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$.

إذن : $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \le e^{-x}\left(e^x-1-x\right) \le \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ ، ومنه : $\frac{1}{2}e^xe^{-\frac{x+|x|}{2}} \le \frac{e^x-1-x}{x^2} \le \frac{1}{2}e^xe^{-\frac{x-|x|}{2}}$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \ : \ \frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \le \frac{e^x-1-x}{x^2} \le \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}}$.

د- لدينا : $\frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}} \le \frac{e^x-1-x}{x^2} \le \frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}$ : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}} = \frac{1}{2}$

حسب خاصيات الترتيب والنهايات ، لدينا : $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}}$

ومنه فإن : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}-\frac{e^x-1-x}{x^2}\,\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا : $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}}$ .

5. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$f''(x) = \left(\frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}\right)' = \frac{-g'(x)(e^x-1)^2 + g(x)\left((e^x-1)^2\right)'}{(e^x-1)^4} = \frac{-xe^x(e^x-1)^2 + 2e^x g(x)(e^x-1)}{(e^x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-xe^x(e^x-1)^2 + 2e^x g(x)(e^x-1)}{(e^x-1)^4} = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(-x(e^x-1) + 2g(x)\right)$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(-xe^x + x + 2 + 2(x-1)e^x\right)$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(e^x(x-2) + 2 + x\right)}$$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، نضع : $h(x) = e^x(x-2) + 2 + x$ ، لدينا :

$$h'(x) = \left(e^x(x-2) + 2 + x\right)' = e^x + e^x(x-2) + 1 = e^x(x-1) + 1 = g(x) \ge 0$$

إذن $h$ تزايدية على $\mathbb{R}$ . وبما أن $h(0) = 0$ ، فإن :

$$x \ge 0 \Rightarrow h(x) \ge h(0) \qquad x \le 0 \Rightarrow h(x) \le h(0)$$

و

$$\Rightarrow h(x) \ge 0 \qquad \Rightarrow h(x) \le 0$$

جـ- لدينا : $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^2} \times \frac{h(x)}{e^x-1}$ : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ .

إشارة $f''(x)$ على $\mathbb{R}^*$ هي إشارة $\frac{h(x)}{e^x-1}$ .

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ . لدينا :

$x<0 \Rightarrow e^x<1$ و $h(x)<0$ 
$\Rightarrow e^x-1<0$ و $h(x)<0$
$\Rightarrow \dfrac{h(x)}{e^x-1}>0$
$\Rightarrow f''(x)>0$

و

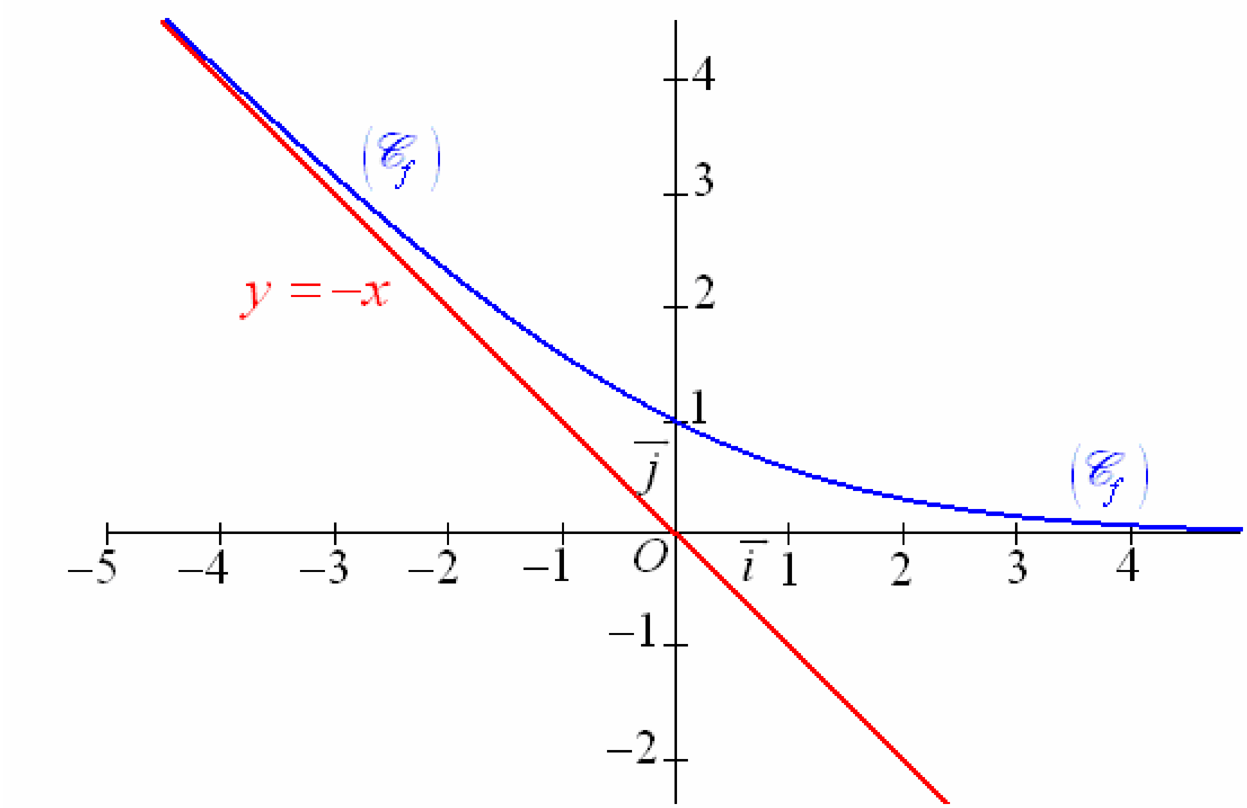
$x>0 \Rightarrow e^x>1$ و $h(x)>0$
$\Rightarrow e^x-1>0$ و $h(x)>0$
$\Rightarrow \dfrac{h(x)}{e^x-1}>0$
$\Rightarrow f''(x)>0$

في كلتا الحالتين ، لدينا : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \ : \ f''(x)>0}$.

د- إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المستوى $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$ .

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=0$ إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $-\infty$ معادلته $y=-x$ .



**III.** لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ . لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1}=x \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1}-x=0 \\ &\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{e^x-1}-1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ أو } \frac{1}{e^x-1}=1 \\ &\Leftrightarrow e^x-1=1 \\ &\Leftrightarrow e^x=2 \\ f(x)=x &\Leftrightarrow x=\ln 2 \end{aligned}$$

ولدينا $f(0)=1\neq 0$ . إذن $x=\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=x$ في $\mathbb{R}$ .

2. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^+$ ، لدينا : $f'(x)=\dfrac{-1-(x-1)e^x}{(e^x-1)^2}=-\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}\leq 0$ .

ولدينا : $f''(x)>0 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$ . إذن $f'$ تزايدية على $\mathbb{R}^+$ .

إذن : $x\geq 0\Rightarrow f'(x)\geq f'(0)\Rightarrow f'(x)\geq -\dfrac{1}{2}$ .

ومنه فإن : $-\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$ . إذن : $-\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq \dfrac{1}{2} \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$ .

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad |f'(x)|\leq -\dfrac{1}{2}}$ .

ب- لدينا $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و $f'$ متصلة على المجال $]0,+\infty[$ . حسب مبرهنة **التزايدات المنتهية**، لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^+; \quad \exists c\in\mathbb{R}^+ \quad / \quad f(x)-f(\ln 2)=f'(c)(x-\ln 2)$ حيث $c$ محصور بين $\ln 2$ و $x$ . إذن : $|f(x)-f(\ln 2)|=|f'(c)||x-\ln 2|$ . وبما أن : $|f'(c)|\leq\dfrac{1}{2}$ و $f(\ln 2)=\ln 2$ ،

فإن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad |f(x)-\ln 2|\leq\dfrac{1}{2}|x-\ln 2|$ .

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، لدينا $u_n\in\mathbb{R}^+$ ، لأن $f(\mathbb{R}^+)=]0,1]\subset\mathbb{R}^+$ . إذن : $|f(u_n)-\ln 2|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\ln 2|$ .

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad |u_{n+1}-\ln 2|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\ln 2|}$

ب- نبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad |u_n-\ln 2|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\ln 2| \qquad (*)$ .

العلاقة $(*)$ صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، نفترض أن العلاقة $(*)$ صحيحة من أجل $n$ ونبين أنها صحيحة من أجل $n+1$ .

لدينا : $\left|u_{n+2}-\ln 2\right|\leq\frac{1}{2}\left|u_{n+1}-\ln 2\right|$ و $\left|u_n-\ln 2\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|u_0-\ln 2\right|$ .

إذن : $\left|u_{n+1}-\ln 2\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2}\times\left|u_0-\ln 2\right|$ . أي : $\left|u_{n+1}-\ln 2\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left|u_0-\ln 2\right|$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \left|u_n-\ln 2\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|u_0-\ln 2\right|}$.

جـ- لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \left|u_n-\ln 2\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|1-\ln 2\right|$ و $-1<\frac{1}{2}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

حسب مصاديق التقارب ، لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 2}$ .

**IV.** نعتبر $F$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\frac{t}{e^t-1}dt & ;\quad x\neq 0\\ F(0)=0 & \end{cases}$$

1. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ . نعلم أن $f$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ ، إذن :

إذا كان $x>0$ ، فإن :

$$\begin{aligned} x\leq t\leq 2x &\Rightarrow f(2x)\leq f(t)\leq f(x)\\ &\Rightarrow \int_x^{2x}f(2x)dt\leq\int_x^{2x}f(t)dt\leq\int_x^{2x}f(x)dt\\ &\Rightarrow xf(2x)\leq F(x)\leq xf(x)\\ &\Rightarrow \boxed{\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\leq F(x)\leq\frac{x^2}{e^x-1}} \end{aligned}$$

إذا كان $x<0$ ، فإن :

$$\begin{aligned} 2x\leq t\leq x &\Rightarrow f(x)\leq f(t)\leq f(2x)\\ &\Rightarrow \int_{2x}^{x}f(x)dt\leq\int_{2x}^{x}f(t)dt\leq\int_{2x}^{x}f(2x)dt\\ &\Rightarrow -xf(x)\leq -F(x)\leq -xf(2x)\\ &\Rightarrow \boxed{\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\leq F(x)\leq\frac{x^2}{e^x-1}} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*\ :\ \frac{2x^2}{e^{2x}-1}\leq F(x)\leq\frac{x^2}{e^x-1}}$ .

ب- لدينا : $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1} \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

وبما أن : $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{e^x-1}{x}(e^x+1)}=\frac{0}{1\times 2}=0$ و $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{0}{1}=0$

فإن : $\lim_{x\to 0}F(x)=0=F(0)$ ، وبالتالي فإن $F$ متصلة في $0$ .

ج- لدينا : $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1} \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

إذن : $\frac{2x}{e^{2x}-1} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \leq \frac{x}{e^x-1} \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

وبما أن : $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{e^x-1}{x}(e^x+1)}=\frac{2}{1\times 2}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1}=1$

فإن : $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=1$ ، ومنه فإن $F$ قابلة للاشتقاق في $0$ و $\boxed{F'(0)=1}$ .

2. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا $f \; : \; t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ دالة متصلة على المجال $[x,2x]$ أو $[2x,x]$ حسب

إشارة $x$،فهي تقبل دالة أصلية $\varphi$ على المجال $[x,2x]$ أو $[2x,x]$، و $\varphi'(x)=f(x) \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

إذن : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{t}{e^t-1}dt=\left[\varphi(t)\right]_x^{2x}=\varphi(2x)-\varphi(x)$ .

لدينا $\varphi$ و $x \mapsto 2x$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $2x \in \mathbb{R}^* \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

إذن : $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و لكل $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$F'(x)=\left(\varphi(2x)-\varphi(x)\right)'=(2x)'\varphi'(2x)-\varphi'(x)=2\times\frac{2x}{e^{2x}-1}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{4}{e^x+1}f(x)-f(x)$$

$$F'(x)=\left(\frac{4}{e^x+1}-1\right)f(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \quad : \quad F'(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)}$ .

ب- نعلم أن $f$ متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]-\infty,+\infty[$ .

إذن : $f\left(]-\infty,+\infty[\right)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right[=]0,+\infty[$. ومنه فإن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x)>0$

وبما أن $F'(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x) \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ ، فإن إشارة $F'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ هي إشارة $(3-e^x)$ .

$$3-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=3 \Leftrightarrow \boxed{x=\ln 3}$$

إذن : $F$ تناقصية قطعا على المجال $[\ln 3,+\infty[$ وتزايدية قطعا على كل من المجالين $]0,\ln 3]$ و $]-\infty,0[$ .

**النهاية.**

بما أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* \ : \ \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \le F(x) \le \frac{x^2}{e^x-1}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=-\infty$ ، لأن $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

فإن : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty}$ وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{e^{2x}-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{t^2}{e^t-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{t^2}{e^t}\frac{1}{1-\frac{1}{e^t}}=0$ ،

حيث $t=2x$ ، لأن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^{\frac{1}{2}t}}\right)^2=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{2u}{e^u}\right)^2=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{2}{\frac{e^u}{u}}\right)^2=0$ وذلك بوضع $u=\frac{1}{2}t$ ،

و أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=0$ ، فإن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0}$ .

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة $F$ على $\mathbb{R}$ كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| $F(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | | $F(\ln 3)$ | $\searrow$ | $0$ |

$$F(\ln 3)=\int_{\ln 3}^{2\ln 3}\frac{t}{e^t-1}dt=-\frac{3}{2}(\ln(3))^2-di\log(9)+di\log(3)\approx 0,4385061927$$

حيث : $di\log(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1-t}dt$ هي الدالة الأصلية للدالة $t\mapsto\frac{\ln t}{1-t}$ على والتي تنعدم في 1

( **هذه الدالة خارج المقرر** )

$(\mathscr{C}_F)$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$ .

لدينا $\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$ و لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^* \ : \ \frac{2x}{e^{2x}-1}\le\frac{F(x)}{x}\le\frac{x}{e^x-1}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{2x}-1}=+\infty$

إذن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$ ومنه فإن $(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب.

إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ :