الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 24

★★ Φ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵡⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

المادة	**الرياضيات**	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

Yassine Mghazli

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

www.9alami.info

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية..........................(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات...............................(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية..........................(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..................................(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل...............................(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

www.9alami.info

1+ ۸ ح

التمرين الأول : (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع: $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ و $E=\{M(x,y)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$ 0.5

2- تحقق أن: 0.5

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2):\ M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$$

3- نضع $E^*=E-\{M(0,0)\}$ ونعتبر التطبيق: $\varphi:\mathbb{C}^*\mapsto E$ الذي يربط العدد العقدي $z=x+iy$ بالمصفوفة $M(x,y)$ من E، حيث الزوج (x,y) من $\mathbb{R}^2$

أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$ 0.25

ب) استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية و أن عنصرها المحايد هو $M(1,0)$ 0.75

4- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي. 0.5

5- نضع $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

www.9alami.info

أ) أحسب $A\times M(x,y)$ من أجل $M(x,y)$ عنصر من E 0.5

ب) استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ 0.5

التمرين الثاني:(3 نقط)

الجزء الأول: ليكن (a,b) عنصرا من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم a^3+b^3

1- بين أن: $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ (لاحظ أن: $171=3\times57$) 0.25

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b 0.25

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a+b$ 0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم a

أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$ 0.5

ب) بين أن: $a^{171}(a+b)\equiv 0\ [173]$ 0.5

ج) استنتج أن 173 يقسم $a+b$ 0.5

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة التالية: $(E)\ \ x^3+y^3=173(xy+1)$

www.9alami.info

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ حلا للمعادلة (E) ؛ نضع: $x+y=173k$ ، حيث $k\in\mathbb{N}^*$

1- تحقق أن: $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$ 0.25

2- بين أن: $k=1$ ثم حل المعادلة (E). 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و موجه $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى وغير مستقيمية.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة : $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

1- أ) بين أن: $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$ 0.5

ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 0.5

2- بين أنه إذا كانت $z_2=\overline{z_1}$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي. 0.5

3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $]0,\pi[$

أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α 0.5

ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$ 0.5

4- ليكن θ عددا حقيقيا **معلوما** من $]0,\pi[$

نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$

أ) بدون حساب z_1 و z_2 تحقق أن: $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ 0.5

ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ. 0.5

التمرين الرابع:(7 نقط)

الجزء الأول:

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t\mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي θ محصور بين 0 و x بحيث : $e^{\theta}=\dfrac{x}{1-e^{-x}}$ 0.5

2- استنتج أن:

أ) $1-x<e^{-x}\quad ;\quad (\forall x>0)$ 0.25

ب) $x+1<e^{x}\quad ;\quad (\forall x>0)$ 0.25

ج) $0<\ln\left(\dfrac{xe^x}{e^x-1}\right)<x\quad ;\quad (\forall x>0)$ 0.25

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(0)=1$ و $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$ إذا كان $x>0$

HAJ

Yassine Mghazli

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 | 0.5

ب) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. | 0.5

2- أ) بين أن: $x-\dfrac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1 \quad (\forall x\geq 0)$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- أ) من الجزء الأول) | 0.25

ب) استنتج أن: $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\leq\dfrac{x^2}{2} \quad (\forall x\geq 0)$ | 0.5

3- أ) تحقق أن: $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x) \quad (\forall x>0)$ | 0.5

ب) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها. | 0.75

4- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2} \quad (\forall x>0)$ | 0.75

ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ب) من الجزء الأول) | 0.5

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي: $u_0>0$ و $u_{n+1}=\ln\left(f(u_n)\right)$ لكل عدد صحيح طبيعي n

1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n>0$ | 0.5

2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ج) من الجزء الأول) | 0.5

3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة : $\ln\left(f(x)\right)=x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ | 0.5

التمرين الخامس: (3 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I=]0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\displaystyle\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$

1- أ) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I | 0.5

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I. | 0.5

ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I | 0.25

2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع: $u=\sqrt{e^t-1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=2\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}$$ | 0.5

ب) احسب: $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ | 0.5

3- أ) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده. | 0.25

ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F . | 0.5

انتهى

HAJ