تصحيح رياضيات 2016 : الإستدراكية

التمرين 1

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي $u_0=2$ و

$u_{n+1}=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1.أ- لنبين بالترجع أن $u_n>1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2>1$ ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$.

نفترض أن $u_n>1$ ونبين أن $u_{n+1}>1$

لدينا $u_n>1$ ومنه فإن $\frac{1}{16}u_n>\frac{1}{16}$ أي أن $\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}>\frac{1}{16}+\frac{15}{16}$ وبالتالي فإن

$$u_{n+1}=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}>\frac{16}{16}=1$$

وبالتالي فالعلاقة صحيحة من أجل $n+1$. ومنه حسب افتراض الترجع فإن $u_n>1$.

ب- نتحقق أن: $u_{n+1}-u_n=-\frac{15}{16}(u_n-1)$

لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}-u_n$$

$$=\frac{1-16}{16}u_n+\frac{15}{16}$$

$$=-\frac{15}{16}u_n+\frac{15}{16}$$

$$=-\frac{15}{16}(u_n-1)$$

لنبين أن (u_n) متتالية تناقصية

لدينا $u_{n+1}-u_n=-\frac{15}{16}(u_n-1)$ وحسب السؤال 1 وجدنا أن $u_n>1$ أي أن $u_n-1>0$ وبالتالي فإن $-\frac{15}{16}(u_n-1)<0$ وبالتالي فإن $u_{n+1}-u_n<0$.

ج- بما أن المتتالية (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 1 فهي متقاربة .

2.لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $v_n=u_n-1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- لنبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{16}$

لدينا :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-1$$

$$=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}-1$$

$$=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}-\frac{16}{16}=\frac{1}{16}u_n-\frac{1}{16}$$

$$=\frac{1}{16}(u_n-1)$$

$$=\frac{1}{16}v_n$$

ومنه فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{16}$
وحدها الأول هو : $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

وبالتالي فإن :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{16}\right)^{n-0} = 1 \times \left(\frac{1}{16}\right)^n = \left(\frac{1}{16}\right)^n$$

ب- لنبين أن $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

لدينا $v_n = u_n - 1$ ومنه فإن $u_n = v_n + 1$ وبما أن $v_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n$ فإن : $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$

تحديد نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ ومنه فإن

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n\right)$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{16} < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

التمرين 2

1. أ- لنبين أن $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

لدينا $\overrightarrow{OA}(1,3,4)$ و $\overrightarrow{OB}(0,1,2)$

ومنه فإن :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 3 & 1 \\ \vec{k} & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(6-4) - \vec{j}(2-0) + \vec{k}(1-0)$$

$$= 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

ب- استنتاج أن $2x - 2y + z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

لدينا : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ متجهة منظمية للمستوى (OAB) ومنه المعادلة الديكارتية ل (OAB) تكتب على الشكل
$2x - 2y + z + d = 0$

لنحدد قيمة العدد d

لدينا $O(0;0;0) \in (OAB)$ ومنه فإن $2x_O + 2y_O + z_O + d = 0$ أي أن $2\times 0 - 2\times 0 + 0 + d = 0$ وبالتالي فإن $d = 0$

ومنه فإن المعادلة الديكارتية ل (OAB) هي
$2x - 2y + z = 0$

2.أ- لنبين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(3,-3,3)$ وأن شعاعها هو 5.

لدينا

$$x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$$

الطريقة السهلة :

لدينا : $a=-6, b=6, c=-6, d=2$ ومنه فإن

$$-\frac{a}{2}=-\frac{-6}{2}=3, -\frac{b}{2}=-\frac{6}{2}=-3, -\frac{c}{2}=3$$

وبالتالي مركز الفلكة هو $\Omega(3,-3,3)$ وشعاعها :

$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4\times(2)}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{36\times 3-12}}{2}=\frac{\sqrt{100}}{2}=5$$

ب- لنبين أن (OAB) مماس ل (S)

لدينا

$$d(\Omega,(OAB))=\frac{|2x_\Omega-2y_\Omega+z_\Omega|}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$=\frac{|6+6+3|}{\sqrt{9}}=\frac{15}{3}=5$$

بما أن : $d(\Omega,(OAB))=5$ فإن المستوى (OAB) مماس الفلكة .

3.أ-لتحديد تقاطع الفلكة (S) مع المستوى (OAB) نحدد تمثيلا بارمتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (OAB).

لدينا (Δ) عمودي على المستوى (OAB) ومنه فإن المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

ولدينا (Δ) يمر من النقطة Ω وبالتالي فإن تمثيله البارمتري هو :

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-2t \\ z=3+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

تحديد التقاطع :

تقاطع الفلكة (S) مع المستوى (OAB) هو

حل النظمة : $(t\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-2t \\ z=3+t \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$$

نعوض المعادلات الثلاث الأولى في المعادلة الرابعة لإيجاد قيمة t .

$$2(3+2t)-2(-3-2t)+3+t=0$$
$$\Rightarrow 4t+4t+t+6+6+3=0$$
$$\Rightarrow 9t+15=0$$

ومنه فإن

$$\Rightarrow t=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3} \\ y = -3 - 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ z = 3 + \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

ومنه فإن تقاطع الفلكة والمستوى هي النقطة

. $H\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$

التمرين 3

1. لنحل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة :

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

لدينا :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 164$$
$$= 64 - 164 = -100 < 0$$

ومنه المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{8 - i\sqrt{100}}{2} = 4 - 5i$$

و

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{8 + i\sqrt{100}}{2} = 4 + 5i$$

ب- لنبين أن : $z' = -iz - 3 + 11i$

لدينا M' صورة النقطة M بالدوران R الذي

مركزه Ω وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

ومنه فإن :

$$z' - \omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - \omega) + \omega$$

$$= -i(z - 4 - 7i) + 4 + 7i$$
$$= -iz + 4i - 7 + 4 + 7i = -iz - 3 + 11i$$

أي أن $z' = -iz - 3 + 11i$

2) . نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(o,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ النقاط؛ Ω و A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي ω و a و b و c بحيث $\omega = 4 + 7i$ و $a = 3 + 4i$ و $b = 3 + 4i$ و $c = 6 + 7i$

$$\frac{c - b}{a - b} = \frac{6 + 7i - (3 + 4i)}{4 + 5i - (3 + 4i)}$$
$$= \frac{3 - 3i}{1 - i} = 3 \in \mathbb{R}$$

ومنه فإن النقط A وB و C نقط مستقيمية .

ج- تحديد لحق صورة النقطة C بالدوران R

لدينا حسب السؤال السابق $z' = -iz - 3 + 11i$

ومنه فإن لحق صورة النقطة C بالدوران R

يحقق $z' = -ic - 3 + 11i$ ومنه فإن:

$$c' = -i(6+7i) - 3 + 11i$$

$$= -6i + 7 - 3 + 11i$$
$$= 4 + 5i = a$$

الشكل المثلثي للعدد العقدي $\frac{a-\omega}{c-\omega}$ يكتب على الشكل :

$$\frac{a-\omega}{c-\omega} = \frac{4+5i-4-7i}{6+7i-4-7i}$$

$$= \frac{-2i}{2}$$
$$= -i$$

$$= i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

التمرين 4

يحتوي صندوق على 10 كرات تحمل الأعداد التالية 1 و 2 و2 و3 و3 و3 و 4 و4 و 4 و 4(لايمكن التمييز بينها باللمس).

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .

1). ليكن A الحدث :»الكرتان المسحوبتان تحملان عددين زوجيين «.

لدينا السحب يتم بالتتابع وبدون إحلال .ومنه فإن : $Card\,\Omega = A_{10}^2 = 90$

وبالتالي فإن :

$$p(A) = \frac{CardA}{Card\,\Omega} = \frac{A_6^2}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

2. أ- لدينا مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{0,1,2,3\}$.

لنبين أن $p(X=1) = \frac{4}{9}$

نكرر الإختبار ‹ سحب عشوائيا كرتين من الصندوق بالتتابع وبدون إحلال › 3 مرات متتالية في نفس الظروف وبالتالي الإختبارات مستقلة فيما بينها ومنه :

$$\boxed{p(X=k) = C_3^k \times (p(A))^k \times (1-p(A))^{3-k}}$$

وبالتالي :

$$p(X=1)=C_3^1\times(p(A))^1\times(1-p(A))^{3-1}$$
$$=3\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$p(X=0)=C_3^0\times(p(A))^0\times(1-p(A))^{3-0}$$
$$=1\times1\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

$$p(X=2)=C_3^2\times(p(A))^2\times(1-p(A))^{3-2}$$
$$=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=3\times\frac{2}{27}=\frac{6}{27}$$

$$p(X=3)=C_3^3\times(p(A))^3\times(1-p(A))^{3-3}$$
$$=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$$

التمرين 5

المسألة

I -1) حساب $g(1)$

لدينا $g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$ ومنه

$$g(1)=\frac{2}{1}-1+2\ln 1=1$$

2. لدينا من خلال الجدول $g(1)=1>0$ قيمة دنوية موجبة وبالتالي

$g(x)>g(1)>0$ لكل x من $]0;+\infty[$

وبالتالي فإن $g(x)>0$

II -1) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بمايلي :

$$f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2cm$)

أ- لنبين أن $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}3-3x+2(x+1)\ln x$$
$$=\lim_{x\to0^+}3-3x+2x\ln x+2\ln x$$
$$=-\infty$$

لأن $\lim_{x\to0^+}3-3x=3$ و $\lim_{x\to0^+}2x\ln x=0$ و $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $x=0$

مقارب للمنحنى (C_f) .

2-أ- لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3-3x+2(x+1)\ln x$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$$

$$=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-3=-3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x=+\infty$

ب- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-3=-3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{x}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

تأويل النتيجة هندسيا:

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ فإن (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

تصحيح رياضيات 2016 : الإستدراكية

3.أ- لنبين أن لكل x من $\mathbb{R}$ $f'(x)=g(x)$.

لدينا:

$$f'(x)=\left(3-3x+2(x+1)\ln x\right)'$$

$$=0-3+2\ln x+\frac{2x}{x}+\frac{2}{x}$$

$$=-3+2\ln x+2+\frac{2}{x}$$
$$=g(x)$$

ب- لدينا $f'(x)=g(x)>0$ لأن $g(x)>0$ ومنه الدالة f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

4-أ- لدينا $f'(x)=g(x)$

ومنه فإن :

تصحيح رياضيات 2016 : الإستدراكية

$$f''(x)=\left(-3+2\ln x+2+\frac{2}{x}\right)'$$
$$=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$$
$$=\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x-1)}{x^2}$$

ومنه فإن :

$$f''(x)=0$$
$$\Rightarrow \frac{2(x-1)}{x^2}=0$$
$$\Rightarrow x-1=0$$
$$\Rightarrow x=1$$

تقعر (C_f)

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
تقعر (C_f)			

ومنه فإن $f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها في النقطة 1.ولدينا $f(1)=3-3+0=0$ وبالتالي فإن النقطة $I(1;0)$ نقطة إنعطاف ل (C_f)

تصحيح رياضيات 2016 : الإستدراكية

4) ب- معادلة المماس في النقطة $I(1;0)$

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[: f'(x) = -3 + 2\ln x + 2 + \frac{2}{x}$ ومنه فإن

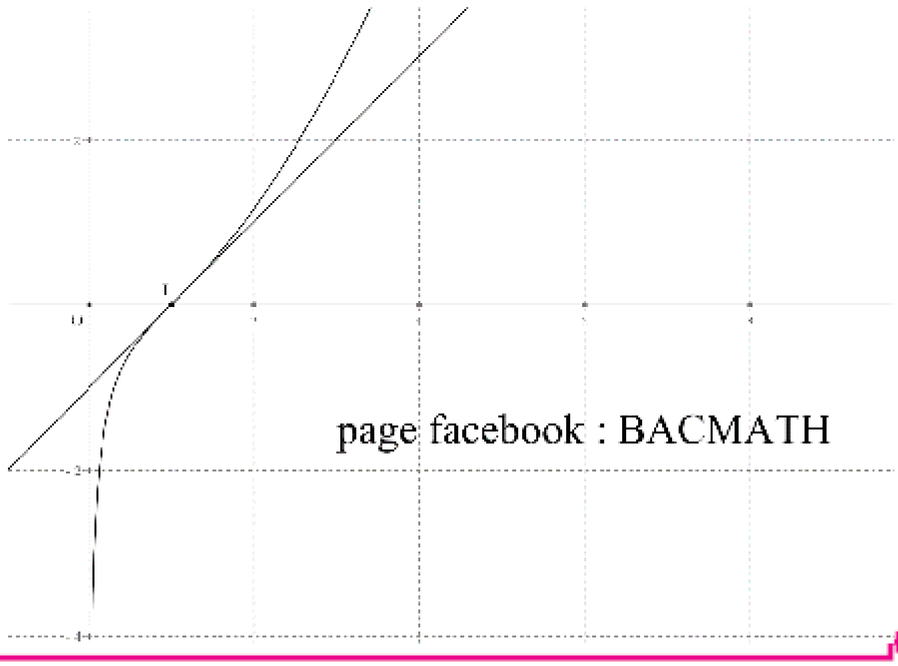
$$f'(1) = -3 + 2\ln 1 + 2 + \frac{2}{1} = 4 - 3 = 1$$

ومنه فإن معادلة المماس هي :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= 1(x-1) + 0$$
$$= x - 1$$

ج- إنشاء المستقيم (T) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم



تصحيح رياضيات 2016 : الإستدراكية

5-أ- لنبين أن $\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{4}$

لدينا:

$$\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \left[x+\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= 2+1-1-\frac{1}{4} = \frac{8}{4}-\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

ب- لنبين أن $\int_1^2 (x+1)\ln x \, dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$

نضع: $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ و $v'(x) = x+1 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$

ومنه فإن :

$$\int_1^2 (x+1)\ln x \, dx$$

$$= \int_1^2 u(x)\times v'(x)dx$$

$$= \left[u(x)\times v(x)\right]_1^2 - \int_1^2 u'(x)\times v(x)dx$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}(x+1)^2 dx$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{2x}dx$$

تصحيح رياضيات 2016 : الإستدراكية

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x}dx$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + 1\right)dx - \int_1^2 \frac{1}{2x}dx$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{7}{4} - \left[\frac{\ln x}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{7}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

$$= \frac{8}{2}\ln 2 - \frac{7}{4}$$

$$= 4\ln 2 - \frac{7}{4}$$

ب- حساب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) ومحور الأراتيب الأفاصيل والمستقيمين الذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

لدينا : $f(1) = 0$ و بما أن $x \geq 1$ و f دالة تزايدية قطعا فإن $f(x) \geq f(1) = 0$ وبالتالي فإن :

$$\int_1^2 |f(x)|dx = \int_1^2 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 3 - 3x + 2(x+1)\ln x dx$$

$$= \int_1^2 3 - 3x dx + 2\int_1^2 (x+1)\ln x dx$$

تصحيح رياضيات 2016 : الإستدراكية

$$= \left[3x - \frac{3x^2}{2}\right]_1^2 + 2\left(4\ln 2 - \frac{7}{4}\right)$$
$$= 6 - 6 - \frac{3}{2} + 8\ln 2 - \frac{7}{2}$$
$$= -5 + 8\ln 2$$

ومنه فإن مساحة الحيز هي :

$$\mathrm{A} = (-5 + 8\ln 2) \times 2 \times 2cm^2$$
$$= (-20 + 32\ln 2)cm^2$$