المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2012
الموضوع

الصفحة
1 / 4

المادة	الرياضيات	NS24	المعامل	9
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز	4

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية...................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات...........................(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..............................(5.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل............................(4.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لايسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

I- في الحلقة الواحدية $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ ، نعتبر المصفوفتين $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

1) احسب $I-A$ و A^2 | 0.75

2) استنتج أن A تقبل مقلوبا المطلوب تحديده . | 0.5

II - لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $I=]1,+\infty[$ نضع : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

1) تحقق أن $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1 \quad ; \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ | 0.25

2) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I | 0.5

3) نذكر أن $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق $\varphi:\ \mathbb{R}^{*+}\to I$
$x\mapsto\sqrt{x+1}$

أ- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ نحو $(I,*)$ | 0.5

ب- استنتج بنية $(I,*)$ | 0.25

ج- بين أن المجموعة $\Gamma=\left\{\sqrt{1+2^m}\ /\ m\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(I,*)$ | 0.75

التمرين الثاني : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

I-نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$ حيث a عدد عقدي غير منعدم.

1) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) | 0.75

2) أ- تحقق أن : $z_1z_2=a^2(i-1)$ | 0.25

ب- بين أن : z_1z_2 عدد حقيقي $\Leftrightarrow \arg a\equiv\frac{-3\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ | 0.5

II- ليكن c عددا حقيقيا غير منعدم و z عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي هي: 1 و $1+i$ و c و ic و z

1) أ- بين أن: A و D و M مستقيمية $\Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\overline{z}=2ic$ (لاحظ أن $c=\overline{c}$) | 0.5

ب- بين أن : $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0$ | 0.5

2) ليكن h لحق النقطة H، المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

أ- بين أن : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$ | 0.75

ب- استنتج أن : $(CH)\perp(BH)$ | 0.25

التمرين الثالث: (3 نقط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 143x - 195y = 52$

1) أ- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 واستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$	0.5
ب- علما أن الزوج $(-1,-1)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل .	0.75
2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع 5 بين أن لكل k من $\mathbb{N}$ لدينا: $n^{4k} \equiv 1\ [5]$	0.5
3) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث: $x \equiv y\ \ [4]$	
أ- بين ان لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $n^x \equiv n^y\ [5]$	0.5
ب- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $n^x \equiv n^y\ [10]$	0.5
4) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين بحيث يكون الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، العددان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .	0.25

التمرين الرابع: (5.5 نقطة)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$	0.5
2) أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $-\infty$	0.5
ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$ ، وحدد الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و (D)	0.5
3) ادرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها .	0.75
4) أنشئ المنحنى (C_3) (نأخذ $f_3(-1,5) \simeq 0$ و $f_3(-0,6) \simeq 0$ و $\ln 3 \simeq 1,1$)	0.75
5) أ- بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $\dfrac{e}{n} < \ln n$	0.25
ب- بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث : $x_n \leq -\ln n$ و $\dfrac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$	1
ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$	0.5
6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x\ ;\ x>0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$	
أ- بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0	0.25

0.25 ب- تحقق أن لكل $n \geq 3$: $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

0.25 ج-استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

التمرين الخامس:(4.5 نقطة)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $F(0) = 1$ و $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ لكل x من $]0,1]$

0.25 1) ليكن x من $[0,1]$. بين أن لكل t من $[0,x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) ليكن x من $]0,1]$

0.5 أ- بين أن : $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

0.75 ب-بين أن : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر .

0.75 3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $[0,1]$: $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

4) ليكن x من $]0,1]$

0.5 أ- بين أن : $F'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

0.75 ب- بين أن $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1))

0.75 ج- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0,x]$ بين أن :

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

0.25 د- استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0

انتهى الموضوع