أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمرين الأول

1 I

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع $\alpha = (x-1)(y-1)$ و $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y \in G$

يعني نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 1 < x*y < 2$

من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y > 1$ و $x*y < 2$

يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} > 0$ و $\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; \alpha+\beta > 0$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$

إلى العمل : ليكن x و y عنصرين من المجال $G =]1,2[$.

إذن : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$.

و منه : $0 < (x-1) < 1$ و $0 < (y-1) < 1$.

أي : $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية $(x-1)(y-1)$ كمية موجبة قطعا .

يعني : $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

إذن : $-1 < (x-2) < 0$ و $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن : $(x-2)$ و $(y-2)$ كميتان سالبتان قطعا .

إذن : جداؤهما كمية موجبة قطعا . يعني : $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y > 1$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)$

نحصل على : $2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2) > (x-1)(y-1)+(x-1)(y-2)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا التالية :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$$

نحصل على : $\frac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y < 2}$ (1)

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

نجد : $2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $2(x-1)(y-1)$

نجد : $2(x-1)(y-1)+2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)+2(x-1)(y-1)$

يعني : $2[(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)] > (x-2)(y-2)+2(x-1)(y-1)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$$

نجد : $2 > \frac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

يعني : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 2 > x*y}$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 1 < x*y < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y \in G$

و بالتالي $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

I 2 أ

لدينا f تطبيق معرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{R}_+^*,\times) \mapsto (G,*) \qquad x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$$

لكي يكون التطبيق f تشاكلا يكفي أن نتحقق من أن :

$\forall x,y \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; f(x\times y) = f(x)*f(y)$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $f(x)*f(y) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)*\left(\frac{y+2}{y+1}\right)$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$

$$= \frac{xy+2}{xy+1} = f(x\times y)$$

إذن : $\boxed{f(x)*f(y) = f(x\times y)}$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$(\forall y \in G),(\exists! x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = y$

أو بتعبير أسهل : يكون f تطبيقا تقابليا عندما يكون للمعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x حل وحيد في $\mathbb{R}_+^*$ مرتبط بـ y .

ليكن y عنصرا من المجموعة G و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $f(x) = y$.

هذه المعادلة تصبح : $\frac{x+2}{x+1} = y$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $(x+1)$

نجد : $(x+2) = y(x+1)$

يعني : $x+2 = xy+y$ يعني : $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $\frac{1}{1-y}$

نجد : $x = \frac{y-2}{1-y}$

نلاحظ أن التعبير $\frac{y-2}{1-y}$ وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

أي وجود عدد آخر y' يحقق $x = \frac{y'-2}{1-y'}$

فإنه سوف نحصل على : $\frac{y-2}{1-y} = \frac{y'-2}{1-y'}$

أي : $y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$

أي : $0 = (y - y')$ أي : $y = y'$

و بالتالي فإن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد .

إذن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا و هو $\dfrac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$.

يعني أنه يكفي أن نبين أن : $\forall y \in]1,2[\; ; \; \dfrac{y-2}{1-y} > 0$

لدينا : $2 > y > 1$ إذن : $-1 < (y-2) < 0$

و لدينا : $2 > y > 1$ إذن : $-1 < (1-y) < 0$

إذن $(y-2)$ و $(1-y)$ كميتان سالبتان قطعا.
أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني : $\forall y \in]1,2[\; ; \; \dfrac{y-2}{1-y} > 0$

إذن : $(\forall y \in G), \left(\exists !\, x = \dfrac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+^*\right) \; : \; f(x) = y$

يعني أن f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G .

خلاصة : $\boxed{f \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{R}_+^*,\times) \text{ نحو } (G,*)}$.

I 2 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحفظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي f من مجموعة $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(F,\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(E,*)$ عن طريق التطبيق f .

و من ثم :

إذا كان $*$ تبادلي أو تجميعي في E فإن $\top$ تبادلي أو تجميعي في F .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E فإن $f(e)$ هو العنصر المحايد للقانون $\top$ في F .

إذا كان x' هو مماثل x بالنسبة للقانون $*$ في E فإن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ بالنسبة للقانون $\top$ في F

في هذا السؤال لدينا f تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f \; : \; (\mathbb{R}_+^*,\times) \longmapsto (G,*)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(G,*)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ عن طريق التطبيق f .

و بما أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 فإن $(G,*)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي $f(1)$ أي العدد $\dfrac{3}{2}$. و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$\boxed{(\forall x \in G) \; ; \; x * \frac{3}{2} = \frac{3}{2} * x = x}$$

II 1 أ

تذكير : لتكن $(E,*,\top)$ حلقة و e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E .
نقول بأن عنصرا x من E قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\boxed{\begin{cases} x \neq e \\ \exists\, y \in E \setminus \{e\} \; ; \; x \top y = y \top x = e \end{cases}}$$

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ التي صفرها $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} A^3 &= A \times A \times A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A^3 = \mathcal{O}}$

لدينا المصفوفة $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي العنصر المحايد لـ $+$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن $A \neq \mathcal{O}$

و لدينا : $A^3 = A \times A^2 = \mathcal{O}$

مع : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathcal{O}$

إذن نستنتج أن $A \neq \mathcal{O}$ و توجد مصفوفة و هي A^2 تخالف $\mathcal{O}$

و تحقق $A \times A^2 = A^2 \times A = \mathcal{O}$

إذن حسب التذكير : المصفوفة A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

II 1 ب

$$\begin{aligned} (A^2 - A + I) \times (A + I) &= A^3 + A^2 - A^2 - A + A + I \\ &= A^3 + I = \mathcal{O} + I = I \end{aligned}$$

و بما أن A و I مصفوفتان من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
فإن المصفوفة $(A^2 - A + I)$ عنصر من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
و نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وحدتها I إذن $\times$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
يعني : $(A+I) \times (A^2 - A + I) = (A^2 - A + I) \times (A + I) = I$
و بالتالي $(A+I)$ مصفوفة قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$
و مقلوبها هو المصفوفة $(A^2 - A + I)$.

و لدينا : $(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} (A^2 - A + I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

خلاصة :

مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 II

لكي يكون $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$\begin{pmatrix}\forall x,y\in E\\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{pmatrix}\ ;\ \begin{cases}(E,+)\ \text{زمرة تبادلية}\\ \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y\\ (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x\\ (\alpha\times\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)\\ 1\cdot x=x\end{cases}$$

بحيث $\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$
و $+$ هو جمع المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
و $\cdot$ هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .
في البداية نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتان من E .
لدينا :
$$\begin{aligned}M(a,b)-M(c,d)&=aI+bA-cI-dA\\&=(a-c)I+(b-d)A\\&=M(a-c\ ;b-d)\in E\end{aligned}$$

إذن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
و بما أن $+$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ فإن $\boxed{(E,+)\ \text{زمرة تبادلية}}$ **(1)**
نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون E جزء من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ و كون E جزء مستقر بالنسبة للقانون $(\cdot)$
و ذلك لأن : $\forall M(a,b)\in E\ ,\forall\alpha\in\mathbb{R}\ ;\ \alpha\cdot M(a,b)=M(\alpha a,\alpha b)\in E$

<u>إذن :</u>
$$\begin{pmatrix}\forall A,B\in E\\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{pmatrix}\ ;\ \begin{cases}(E,+)\ \text{زمرة تبادلية}\\ \alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B\\ (\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A\\ (\alpha\times\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)\\ 1\cdot A=A\end{cases}\quad(2)$$

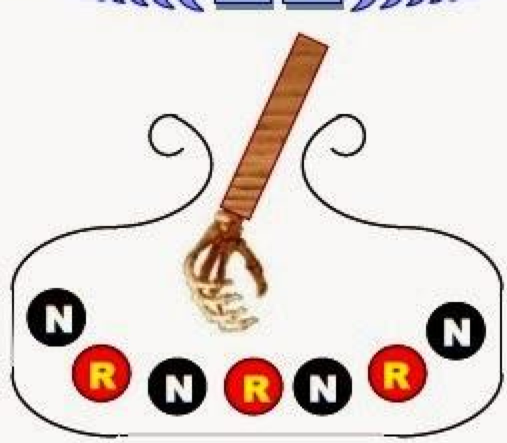
من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
نعتبر الأسرة (I,A) .
من الواضح أن الأسرة (I,A) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.
لأن : $\forall M(a,b)\in E\ ;\ M(a,b)=aI+bA$
يعني أن كل مصفوفة من E تكتب على شكل تأليفة خطية للمصفوفتين I و A
لنبين الآن أن الأسرة (I,A) حرة .
من أجل ذلك ننطلق من تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و A .

$$\begin{aligned}&a\cdot I+b\cdot A=O\\ &\Rightarrow \begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3b&2b\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow \begin{pmatrix}a&3b&2b\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\end{aligned}$$

إذن الأسرة (I,A) حرة .
و بما أن (I,A) أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي

التمرين الثاني

1 I



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل 7^4 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega)=7^4=2401$
بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .
X هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني : $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$
قانون احتمال المتغير العشوائي X سيكون إذن التطبيق P_X المعرف على المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$ نحو المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{aligned}P_X\ :\ \{0,1,2,3,4\}&\longmapsto[0,1]\\ k&\longmapsto P_X(k)=p[X=k]\end{aligned}$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة k من قيم المتغير العشوائي X .

<u>لنحسب : $p[X=0]$</u>
الحدث $[X=0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد 3^4 امكانية لسحب الكرات الأربع .
إذن : $\boxed{p[X=0]=\dfrac{3^4}{7^4}=\dfrac{81}{2401}}$

<u>لنحسب : $p[X=1]$</u>
الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :
4^1 إمكانية لسحب الكرة السوداء
C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء
3^3 إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء
إذن : $\boxed{p[X=1]=\dfrac{4^1\times C_4^1\times 3^3}{7^4}=\dfrac{432}{2401}}$

<u>لنحسب : $p[X=2]$</u>
الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين . و من أجل ذلك لدينا :
4^2 إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .
C_4^2 إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .
3^2 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .
إذن : $\boxed{p[X=2]=\dfrac{4^2\times C_4^2\times 3^2}{7^4}=\dfrac{864}{2401}}$

لنحسب : $p[X=3]$

الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :

3^1 إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

4^3 إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

إذن : $$\boxed{p[X=3] = \frac{3^1\times C_4^1\times 4^3}{7^4} = \frac{768}{2401}}$$

لنحسب : $p[X=4]$

الحدث $[X=4]$ هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

إذن : $$\boxed{p[X=4] = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}}$$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي

$$P_X \ : \ \{0,1,2,3,4\} \ \longmapsto \ [0,1]$$

$$\begin{array}{|l|}\hline 0 \ \longmapsto \ P_X(0) = \dfrac{81}{2401} \\ 1 \ \longmapsto \ P_X(1) = \dfrac{432}{2401} \\ 2 \ \longmapsto \ P_X(2) = \dfrac{864}{2401} \\ 3 \ \longmapsto \ P_X(3) = \dfrac{768}{2401} \\ 4 \ \longmapsto \ P_X(4) = \dfrac{256}{2401} \\ \hline\end{array}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\boxed{\frac{81}{2401}+\frac{432}{2401}+\frac{864}{2401}+\frac{768}{2401}+\frac{256}{2401}=1}$$

I 2

$$E(X) = \sum_{0}^{4} k\cdot p[X=k]$$
$$= 0\left(\frac{81}{2401}\right)+1\left(\frac{432}{2401}\right)+2\left(\frac{864}{2401}\right)+3\left(\frac{768}{2401}\right)+4\left(\frac{256}{2401}\right)$$
$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$

II 1

لدينا : $p(E\cap N) = p_N(E)\times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث E هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحبات متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزيء الحدث E في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

E_1 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى

E_2 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية

E_3 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب : $E = E_1\cap E_2\cap E_3$

و منه : $p_N(E) = p_N(E_1)\times p_N(E_2)\times p_N(E_3)$

يعني :
$$p(E\cap N) = p_N(E)\times p(N)$$
$$= p_N(E_1)\times p_N(E_2)\times p_N(E_3)\times p(N)$$
$$= \frac{9}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}\times\frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \boxed{\frac{12}{55}}$$

II 2

$$p(E) = p(E\cap N) + p(E\cap R)$$
$$= \frac{12}{55} + p_R(E_1)\times p_R(E_2)\times p_R(E_3)\times p(R)$$
$$= \frac{12}{55} + \frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{7}$$
$$= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \boxed{\frac{87}{385}}$$

II 3

لنحسب $p_E(R)$

$$p_E(R) = \frac{p(R\cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E)\times p(R)}{p(E)}$$
$$= \frac{p_R(E_1)\times p_R(E_2)\times p_R(E_3)\times p(R)}{p(E)}$$
$$= \frac{\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \boxed{\frac{1}{29}}$$

التمرين الثالث

I 1

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

لدينا :
$$\Delta = 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2$$
$$= -4(a-1)^2$$
$$= \left(2i(a-1)\right)^2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 .

$$z_1 = \frac{2(a-1)+2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$
$$z_2 = \frac{2(a-1)-2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$

I 2 أ

لدينا $a = e^{i\theta}$ مع $0<\theta<\pi$ إذن : $(a-1) = e^{i\theta}-1$

$$(a-1) = e^{i\theta}-1 = \cos\theta + i\sin\theta - 1$$
$$= \cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بحيث : $(a-1) = r\,e^{i\varphi}$.

يعني : $\cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta) = r\cos(\varphi) + i\,r\sin(\varphi)$

أي : $$\begin{cases}\cos(\theta)-1 = r\cos(\varphi)\\ \sin(\theta) = r\sin(\varphi)\end{cases}$$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد : $(\cos(\theta)-1)^2 + sin^2\theta = r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)$

يعني : $\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta = r^2$

يعني : $2(1-\cos\theta) = r^2$

يعني : $2\left(1 - \left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)\right) = r^2$

يعني : $2\left(2 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = r^2$

يعني : $4\left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = r^2$

يعني : $4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = r^2$

يعني : $r = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ و $r > 0$

يكفي الآن تحديد قيمة φ . و ننطلق من الكتابة $\sin\theta = r\sin\varphi$

يعني : $\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\varphi)$

يعني : $2\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

يعني : $\frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

يعني $\varphi \equiv \frac{\theta-\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن : $\boxed{(a-1) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}}$

I 2 ب

في البداية لدينا :

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1-i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

إذن :

$$z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{4}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

II 1

لدينا J هي منتصف القطعة $[AC]$.

إذن : $\boxed{aff(J) = \frac{aff(A) + aff(C)}{2} = \frac{a+i}{2}}$

و لدينا K هي منتصف القطعة $[AB]$.

إذن : $\boxed{aff(K) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} = \frac{a-i}{2}}$

II 2

لدينا r_1 دوران مركزه J و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

و لدينا $r_1(C) = C'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$\left(aff(C') - aff(J)\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(aff(C) - aff(J)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(c' - \frac{a+i}{2}\right) = i\left(i - \frac{a+i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1-ia+a+i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا r_2 دوران مركزه K و زاويته $\frac{\pi}{2}$

و لدينا $r_2(A) = A'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$\left(aff(A') - aff(K)\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(aff(A) - aff(K)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a' - \frac{a-i}{2}\right) = i\left(a - \frac{a-i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia-1+a-i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

إذن : $\boxed{c' = z_2 \quad \text{و} \quad a' = z_1}$

II 3

لدينا :

$$\frac{a'-c'}{a-1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}}$$

$$= \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2} \times \frac{1}{(a-1)}$$

$$= \frac{i\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}} = i$$

إذن : $\frac{a'-c'}{a-1} = i$ و منه : $\arg\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'A'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

و هذا يعني أن المستقيم (AB') عمودي على المستقيم $(A'C')$.

أي أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$

لأن $B' \in (AB')$ و $(A'C') \perp (AB')$.

التمرين الرابـــع

1 أ

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0^+)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 = f(0)$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة على يمين الصفر .

لنحسب الآن نهاية f بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(+\infty)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+}x(\ln x)^2=0$$

لدينا :
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق $\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)$ نجد :

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-1-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}(-x(\ln x)^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=(-0)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(0)^2}\left(1+\sqrt{1+(0)^2}\right)}\right)=(0)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

إذن :
$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=0}$$

و هذا يعني أن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و $f'_d(0)=0$.

1 ج

تذكير : إذا كانت g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I .
و كانت f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال J .
إذن تكون الدالة $f\circ g$ قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كان : $g(I)\subseteq J$

لدينا :
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$$

نضع : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

و نضع : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ \psi(x)=x\ln x$

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f(x)=\varphi\circ\psi(x)$

لدينا ψ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$
و φ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
إذن تكون الدالة $\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$
إذا كان : $\psi(]0,+\infty[)\subseteq\mathbb{R}$
ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $\psi(x)=x\ln x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right[\subset\mathbb{R}$

إذن : $\psi(]0,+\infty[)\subseteq\mathbb{R}$

إذن الدالة $f=\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$. لدينا :

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}=(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-1}{2}}}$$

إذن :
$$f'(x)=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-1}{2}-1}(1+(x\ln x)^2)'$$
$$=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(x\ln x)'$$
$$=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(1+\ln x)$$
$$=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن :
$$\boxed{(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

1 د

نلاحظ في البداية أن : $(\forall x>0)\ ;\ (1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}>0$
إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.
الكمية $\ln x$ تنعدم في 1 و الكمية $1+\ln x$ تنعدم في $\frac{1}{e}$.
نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$1+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	↘	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	↗	1	↘	0

2 أ

لدينا :
$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{(\ln x)}dx$$
$$=\ln(|\ln x|)+c\quad;\quad c\in\mathbb{R}$$

بما أن : $x\in[e;+\infty[$ فإن : $\ln x\geq1$
نأخذ الثابتة c تساوي 0 نجد أن الدالة $x\to\ln(\ln x)$ دالة أصلية للدالة $x\to\frac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e;+\infty[$.
و أشير إلى أن $x\to\ln(\ln x)$ دالة معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$
إذن فهي متصلة على $[e,+\infty[$ لأن : $[e,+\infty[\ \subset\ ]1,+\infty[$.

2 ب

ليكن t عنصرا من المجال $[e,+\infty[$.

ننطلق من المتفاوتة $1>0$ و نضيف إلى طرفيها الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(t\ln t)^2 < 1+(t\ln t)^2$

و منه : $\sqrt{(t\ln t)^2} < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$

يعني : $(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}\quad (1)$

و لدينا كذلك $t\geq e$ إذن $\ln t\geq 1$.

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نجد : $t\ln t\geq e>1$

نحتفظ بالمتفاوتة : $(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t>1$

التي تصبح : $(\forall t\geq e)\ ;\ (t\ln t)^2>1$

نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(\forall t\geq e)\ ;\ 2\,(t\ln t)^2>1+(t\ln t)^2$

يعني : $(\forall t\geq e)\ ;\ \sqrt{2}\,t\ln t>\sqrt{1+(t\ln t)^2}\quad (2)$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}<\sqrt{2}\,t\ln t}$$

2 ج

من خلال آخر تأطير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t\geq e)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t\ln t}\right)<\frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}<\frac{1}{t\ln t}$$

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $x\geq e$.

نُدخل التكامل $\int_e^x dt$ على هذا التأطير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_e^x\left(\frac{1}{t\ln t}\right)dt<\int_e^x\frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\int_e^x\frac{1}{t\ln t}dt$$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\ln t)]_e^x<\int_e^x\frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<[\ln(\ln t)]_e^x$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\int_e^x\frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\ln(\ln x)$

2 د

لدينا حسب آخر تأطير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\int_e^x\frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\ln(\ln x)$$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\int_e^x f(t)\,dt<\ln(\ln x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x)=\ln(\ln(+\infty))=\ln(+\infty)=+\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty}<\int_e^x f(t)\,dt<\underbrace{\ln(\ln x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty}}$$

و هذا يعني حسب خاصية التأطير و النهايات أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_e^x f(t)\,dt=+\infty}$$

إذن :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}F(x)&=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt+\int_e^x f(t)\,dt\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\begin{pmatrix}constante\\réelle\end{pmatrix}+\lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right)\\&=(+\infty)+(+\infty)=+\infty\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty}\quad(1)$

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\int_e^x f(t)\,dt<\ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب قطعا x نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)<\frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt<\frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لنحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)\times\frac{\ln x}{\ln x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)\times\frac{\ln x}{x}\\&=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty\\y=\ln x}}\frac{\ln y}{y}\times\frac{\ln x}{x}=0\times0=0\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)=0}$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}<\frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt<\underbrace{\frac{\ln(\ln x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}}$$

و منه حسب خاصية النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt=0}$$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt+\int_e^x f(t)\,dt\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right)+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right)}_{0}\\ &= \left(\frac{1}{+\infty}\right)\times\binom{constante}{réelle}+0=0\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$ (2)

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل .

2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$.

لدينا F دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

أو بتعبير الاشتقاق نكتب : $\forall x\in[0,+\infty[\ ;\ F'(x)=f(x)$

و بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

فإن الدالة F' قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;F''(x)=f'(x)=\dfrac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

إذن تنعدم الدالة $F''(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

عندما تنعدم الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.

أي تنعدم الدالة $F''(x)$ إذا كان $x=1$ أو $x=\frac{1}{e}$

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق .

و بالتالي $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي $\frac{1}{e}$ و 1 .

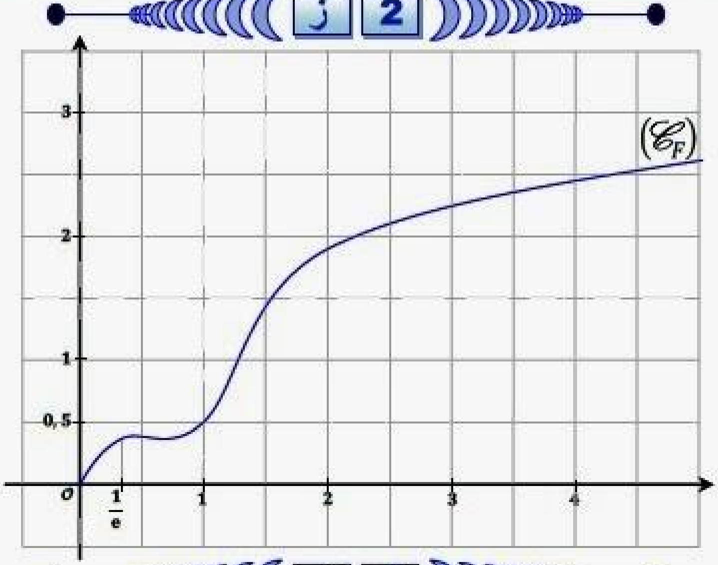
و يمكن أن نضيف جدول التقعر للمنحنى $(\mathscr{C}_F)$

و ذلك انطلاقا من جدول إشارة $f'(x)$.

لأن : $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ F''(x)=f'(x)$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$F''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(\mathscr{C}_F)$		$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ محدب	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	

2 ز



3 أ

نستعمل النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-F(x))=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{F(x)}{x}\right)\\ &=(+\infty)(1-0)=+\infty\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$

من جهة ثانية لدينا φ معرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $\varphi(x)=x-F(x)$

و لدينا كذلك F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ بحيث : $F'(x)=f(x)$

إذن φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x)=1-F'(x)=1-f(x)$

نلاحظ أنه إذا كان $x=0$ فإن $f(x)=1$

يعني : $1-f(x)$ أي : $\varphi'(x)=0$

<u>إذا كان</u> $0\le x\le\frac{1}{e}$ فإن $f(0)\ge f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

إذن : $1\ge f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني : $1-f(x)\ge 0$ أي : $\varphi'(x)\ge 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

<u>إذا كان</u> $\frac{1}{e}\le x\le 1$ فإن $f\left(\frac{1}{e}\right)\le f(x)\le f(1)$

لأن f دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

إذن $f\left(\frac{1}{e}\right)\le f(x)\le 1$ يعني : $1-f(x)\ge 0$ أي : $\varphi'(x)\ge 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

<u>إذا كان</u> $x\ge 1$: فإن $f(x)\le f(1)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $[1,+\infty[$.

إذن : $f(x)\le 1$ يعني : $1-f(x)\ge 0$ أي : $\varphi'(x)\ge 0$.

إذن φ دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

<u>**خلاصة**</u> : $\boxed{\varphi \text{ دالة تزايدية قطعا على المجال } [0,+\infty[}$

3 ب

لدينا φ دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو صورته $\varphi([0,+\infty[)$.

و لدينا : $\varphi([0,+\infty[) = \left[\varphi(0) ; \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[= [0,+\infty[$

إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو المجال $[0,+\infty[$.

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall y \in [0,+\infty[)\,,(\exists! x \in [0,+\infty[) \; ; \; \varphi(x) = y$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

إذن : $n \in [0,+\infty[$ لأن : $\mathbb{N} \subset [0,+\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ α_n في المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة $\varphi(x) = n$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا و هو α_n في المجال $[0,+\infty[$ و ذلك كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

أو بتعبير أخير : $(\forall n\in\mathbb{N})\,,(\exists!\ \alpha_n \geq 0) \; ; \; \varphi(\alpha_n) = n$

3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; \alpha_n \geq 0$

إذن $F(\alpha_n) \geq F(0)$ لأن F تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

يعني أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; F(\alpha_n) \geq 0$ (1)

و نعلم أن : $(\forall x \geq 0) \; ; \; \varphi(x) = x - F(x)$

إذن : $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$ لأن : $\alpha_n \geq 0$

يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$ (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على : $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني : $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; \alpha_n \geq n$

نلاحظ أن : $\lim_{n\infty} n = +\infty$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; \alpha_n \geq \underset{\substack{\downarrow n\infty \\ +\infty}}{n}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty}$

4 أ

ليكن $n \geq 1$ و $n\in\mathbb{N}$.

لدينا الدالة F متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\forall x \in [0,+\infty[\; ; \; F'(x) = f(x)$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في أي مجال محدود يوجد ضمن $[0,+\infty[$.

<u>**في المرحلة الأولى**</u> : نختار المجال $[0;\alpha_n]$.

لدينا $[0;\alpha_n] \subset [0,+\infty[$ لأن $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; \alpha_n \geq 0$

إذن ، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد عنصر c من المجال $]0;\alpha_n[$ بحيث : $\dfrac{F(\alpha_n) - F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$

يعني : $0 < c < \alpha_n$ و $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا : $0 < c < \alpha_n$ إذن : $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$

و منه : $1 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$ (*)

بما أن $n \in [1;+\infty[$ و $\alpha_n \geq n \geq 1$ فإن $\alpha_n \in [1;+\infty[$

لدينا $\alpha_n \geq n$ إذن $f(\alpha_n) \leq f(n)$ لأن f تناقصية على $[1;+\infty[$

إذن بالرجوع إلى التأطير (*) نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

يعني : $\boxed{0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)}$ (1)

في المرحلة الثانية نُطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في $[0;n]$

إذن يوجد عنصر ε من $]0;n[$ بحيث :

$$\boxed{\frac{F(n) - F(0)}{n - 0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)}$$

يعني : $0 < \varepsilon < n$ و $\dfrac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا : $0 < \varepsilon < n$ إذن : $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني : $1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $0 < 1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

يعني : $0 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $\boxed{-f(n) < \dfrac{-F(n)}{n} < 0}$ (2)

نجمع التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\boxed{-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)}$$

ما يهمنا في هذا التأطير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

الذي يصبح : $\boxed{\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)}$ (3)

و من التأطير (1) نستنتج أن : $\boxed{0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$ (4)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n \geq 1) \; ; \; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)} \quad (\star)$$

4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

إذن : $\lim_{n\infty}\left(\dfrac{F(n)}{n} + f(n)\right) = 0$

و منه فإن التأطير $(\star)$ يُصبح :

$$(\forall n \geq 1) \; ; \; \underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}{0} < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}{\underline{\frac{F(n)}{n} + f(n)}}$$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(\blacksquare)\quad \boxed{\lim_{n\infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0}$$

من جهة أخرى نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \varphi(x) = x - F(x)$

لدينا $\alpha_n \geq 0$ إذن $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$ يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \dfrac{n}{\alpha_n}$

يعني : $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim\limits_{n\infty} \left(1 - \dfrac{n}{\alpha_n}\right)$

يعني : $0 = 1 - \lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$ يعني : $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right) = 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)} = \dfrac{1}{1} = 1$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 1}$

التمرين الخامس

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n \geq 1$

لدينا :

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right) = n^2 \ln\left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right) = n^2\left[\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1))\right]$$

2

نعتبر f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \ln(arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة f متصلة على $]0;+\infty[$ و كذلك f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأن ln دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و $arctan$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $]0;+\infty[\subset \mathbb{R}$.

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f في أي مجال محدود و يوجد ضمن $]0;+\infty[$

ليكن $n \geq 1$ و نختار المجال $[n\ ;\ n+1]$.

إذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]n\ ;n+1[$ بحيث :

$$(**)\quad \boxed{\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)}$$

لدينا : $\forall\, x \in]0;+\infty[\ ;\ f(x) = \ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(arctan(x))'}{arctan(x)} = \frac{\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)}{arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2)\, arctan(x)}$$

إذن بالرجوع إلى المتساوية $(**)$ نجد :

$$\boxed{\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2)\, arctan(c)}}$$

يعني :

$$\ln(arctan(n+1)) - \ln(arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2)\, arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2)\, arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم n^2 نجد :

$$n^2\left[\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1))\right] = \frac{-n^2}{(1+c^2)\, arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال 1 نجد : $\boxed{v_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)\, arctan(c)}}$

خلاصة :

$$\boxed{(\forall n \geq 1), (\exists\, c \in]n;n+1[)\ ;\ v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\, arctan(c)}}$$

3

لدينا : $n < c < n+1$

نُدخل الدالة $arctan$ على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ نجد :

$$(1)\quad arctan(n) < arctan(c) < arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك : $n < c < n+1$

إذن : $(2)\quad (1+n^2) < (1+c^2) < 1 + (n+1)^2$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\boxed{\begin{aligned}(1+n^2)arctan(n) &< (1+c^2)arctan(c)\\ &< (1+(n+1)^2)arctan(n+1)\end{aligned}}$$

نُدخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)} &< \frac{1}{(1+c^2)arctan(c)}\\ &< \frac{1}{(1+n^2)arctan(n)}\end{aligned}}$$

و نضرب أطرف هذا التأطير في العدد السالب قطعا $-n^2$ نجد :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} &< \frac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}\\ &< \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}\end{aligned}}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال 2 نجد :

$$\boxed{\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}}$$

$(\otimes)$

4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{-\pi}{2}}$$ و $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}}$$

لدينا :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}$$
$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+2n+2}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right)$$
$$= (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}$$
$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+1}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right)$$
$$= (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

إذن التأطير $(\otimes)$ يُصبح :

$$\underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \frac{-2}{\pi}} < v_n < \underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \frac{-2}{\pi}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد : $$\boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = \frac{-2}{\pi}}$$

و لدينا $v_n = \ln(u_n)$ إذن : $u_n = e^{v_n}$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{v_n} = e^{\left(\lim_{n\infty} v_n\right)} = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}$

و بالتالي : $$\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}}$$

و الحمد لله رب العالمين