

تصحيح الإمتحان الوطني لمادة الرياضيات

السنة الثانية علوم رياضية

يونيو 2012

ذ. سعيد الصديق ثا. الشابي التأهيلية تارودانت

التمرين الأول

I

حساب $I - A$ و A^2 ①

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6-2\sqrt{5}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 A تقبل مقلوبا :

$$\begin{aligned}
A^2 &= I - A \\
\Rightarrow A^2 + A &= I \\
\Rightarrow A(A + I) &= I \quad \text{و} \quad (A + I)A = I \\
\Rightarrow A(A + I) &= (A + I)A = I
\end{aligned}$$

لدينا

إذن المصفوفة **A** تقبل مقلوبا .تحديد مقلوب A :

$$A(A + I) = (A + I)A = I$$

لدينا

$$A^{-1} = A + I$$

إذن

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

II

1 ليكن x و y من \mathbb{R}

$$\begin{aligned}
(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1 &= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1 \\
&= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2
\end{aligned}$$

لدينا

2 * قانون تركيب داخلي في I :ليكن a و b من $I =]1; +\infty[$

$$a > 1 \quad \text{و} \quad b > 1$$

لدينا

$$\Rightarrow a^2 > 1 \quad \text{و} \quad b^2 > 1$$

$$\Rightarrow (a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - 1)(b^2 - 1) + 1 > 1$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2 > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2} > 1$$

$$\Rightarrow a * b > 1$$

$$\Rightarrow a * b \in I$$

* قانون تركيب داخلي في I.

وبالتالي

③ أ- φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ نحو $(I; *)$

φ تشاكل :

ليكن a و b من \mathbb{R}_+^*

$$\varphi(a) * \varphi(b) = \sqrt{a+1} * \sqrt{b+1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \sqrt{(a+1)(b+1) - (a+1) - (b+1) + 2}$$

$$= \sqrt{ab + a + b + 1 - a - 1 - b - 1 + 2}$$

$$= \sqrt{ab + 1}$$

$$= \varphi(a \times b)$$

وبالتالي φ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ نحو $(I; *)$.

φ تقابل من $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ نحو $(I; *)$:

ليكن y من I ، لنحل في \mathbb{R}_+^* المعادلة $y = \varphi(x)$

$$y = \varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x+1$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}^2 - \mathbf{1} \in \mathbb{R}_+^*$$

المعادلة $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ تقبل **حلا وحيدا** في \mathbb{R}_+^*

إذن $\boldsymbol{\varphi}$ **تقابل من** $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ **نحو** $(I; *)$:

$\boldsymbol{\varphi}$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ نحو $(I; *)$

وبالتالي

ب - بنية $(I; *)$

بما أن $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ زمرة تبادلية و $\boldsymbol{\varphi}$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ نحو $(I; *)$

$(I; *)$ زمرة تبادلية

فإن :

ج - زمرة جزئية من $(I; *)$

$$\Gamma \subset I$$

لدينا

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 + 2^0} \in \Gamma$$

ولدينا

$$\Gamma \neq \emptyset$$

إذن

ليكن \mathbf{x} و \mathbf{y} من Γ :

إذن يوجد \mathbf{n} و \mathbf{m} من \mathbb{Z} بحيث : $\mathbf{x} = \sqrt{1 + 2^n}$ و $\mathbf{y} = \sqrt{1 + 2^m}$

$$\mathbf{x} * \mathbf{y}' = \sqrt{1 + 2^n} * (\sqrt{1 + 2^m})'$$

إذن

$$= \boldsymbol{\varphi}(2^n) * (\boldsymbol{\varphi}(2^m))'$$

$$= \boldsymbol{\varphi}(2^n) * \boldsymbol{\varphi}((2^m)')$$

$$= \boldsymbol{\varphi}(2^n) * \boldsymbol{\varphi}\left(\frac{1}{2^m}\right)$$

$$= \varphi \left(2^n \times \frac{1}{2^m} \right)$$

$$= \varphi(2^{n-m}) = \sqrt{1 + 2^{n-m}} \in \Gamma$$

وبالتالي

Γ زمرة جزئية من $(I; *)$

التمرين الثاني

I

1 تحديد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

مميز المعادلة (E) هو :

$$\Delta = (2 - i)^2 a^2 + 4i(1 + i)$$

$$= a^2(4 - 4i - 1 + 4i - 4)$$

$$= -a^2 = (ia)^2$$

إذن

$$z_1 = \frac{(i-2)a+ia}{2i} = \frac{a(i-2+i)}{2i} = \frac{a(i-1)}{i} = a(i-1)$$

$$z_2 = \frac{(i-2)a-ia}{2i} = \frac{a(i-2-i)}{2i} = \frac{-a}{i} = ai$$

و

$$z_1 z_2 = a^2(i-1) \quad \text{أ- 2}$$

$$z_1 z_2 = a(i+1)ai = a^2(-1+i) = a^2(i-1) \quad \text{لدينا}$$

$$\text{ب- } z_1 z_2 \text{ عدد حقيقي} \Leftrightarrow \text{arg} a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

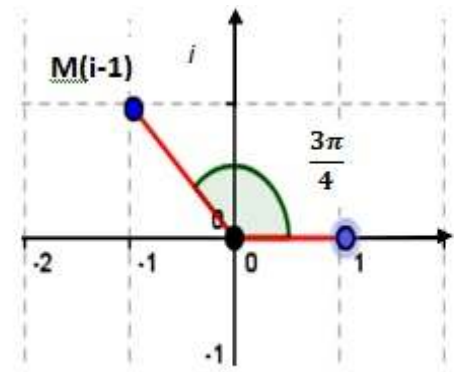
$$\text{لدينا } z_1 z_2 \text{ عدد حقيقي يكافئ } \text{arg}(z_1 z_2) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(a^2(i-1)) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\arg a + \arg(i-1) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\arg a + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$



II

$$(ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic \Leftrightarrow \text{مستقيمة } M \text{ و } D \text{ و } A \text{ - أ } \textcircled{1}$$

$$\frac{z-1}{z-ic} \in \mathbb{R} \quad \text{يكافئ} \quad \text{مستقيمة } M \text{ و } D \text{ و } A$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{z-ic}\right)} = \frac{z-1}{z-ic}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+ic} = \frac{z-1}{z-ic} \quad \bar{c} = c$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+ic) = (\bar{z}-1)(z-ic)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{z\bar{z}} + icz - \bar{z} - ic = \bar{z}z - ic\bar{z} - z + ic$$

$$\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$$

$$(ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (AD) \perp (OM) \text{ - ب}$$

$$\overline{(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{OM})} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \quad \text{يكافئ} \quad (AD) \perp (OM) \text{ لدينا}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{ic-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{ic-1} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z}{ic-1}\right)} = -\frac{z}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{-ic-1} = -\frac{z}{ic-1}$$

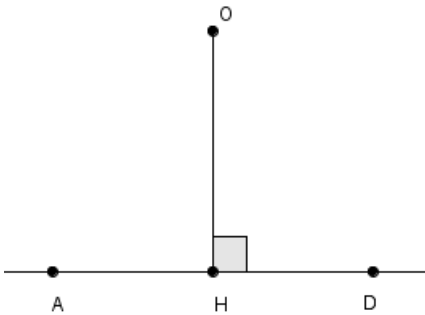
$$\Leftrightarrow (ic+1)z = (ic-1)\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (ic + 1)z - (ic - 1)\bar{z} = 0$$

$$h - (1 + i) = \frac{i}{c} (h - c) \quad \text{أ- 2}$$

لدينا H المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

إذن $(AD) \perp (OH)$ و A و D و H مستقيمية



نجمع المتساويتين
طرفا بطرف

$$\Rightarrow \begin{cases} (ic + 1)h + (ic - 1)\bar{h} = 2ic \\ (ic + 1)h - (ic - 1)\bar{h} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(ic + 1)h = 2ic$$

$$\Rightarrow ich + h = ic$$

من جهة أخرى لدينا :

$$h - (1 + i) = \frac{i}{c} (h - c)$$

$$\Leftrightarrow ch - c(1 + i) = i(h - c)$$

$$\Leftrightarrow ch - c - ic = ih - ic$$

$$\Leftrightarrow ch - c = ih$$

$$\Leftrightarrow ich - ic = -h$$

$$\Leftrightarrow ich + h = ic$$

وبالتالي

$$h - (1 + i) = \frac{i}{c} (h - c)$$

ب- $(CH) \perp (BH)$

$$h - (1 + i) = \frac{i}{c} (h - c)$$

لدينا :

$$\Rightarrow \frac{h - (1 + i)}{h - c} = \frac{i}{c}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{h-(1+i)}{h-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(\overrightarrow{CH}; \overrightarrow{BH})} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Rightarrow (CH) \perp (BH)$$

التمرين الثالث

1 أ- $195 \wedge 143$

لدينا حسب خوارزمية إقليدس :

$$195 = 143 + 52$$

$$143 = 2 \times 52 + 39$$

$$52 = 39 + 13$$

$$39 = 3 \times 13$$

$$195 \wedge 143 = 13$$

إذن :

بما أن 13 تقسم 52 فإن المعادلة (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 .

ب- حل المعادلة (E) في \mathbb{Z}^2

ليكن الزوج $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) في \mathbb{Z}^2 إذن $143x - 195y = 52$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 15y = 4 \\ 11(-1) - 15(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11x - 15y = 11(-1) - 15(-1)$$

$$\Rightarrow 11(x + 1) = 15(y + 1)$$

$$\Rightarrow 11 / 15(y + 1)$$

بما أن $11 \wedge 15 = 1$ حسب مبرهنة كُوص Gauss فإن $11/y + 1$

$$\Rightarrow y + 1 = 11k/k \in \mathbb{Z} \text{ و } 11(x + 1) = 15 \times 11k$$

$$\Rightarrow y = 11k - 1 \text{ و } x + 1 = 15k / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 15k - 1 \text{ و } y = 11k - 1 / k \in \mathbb{Z}$$

عكسيا لدينا

$$11(15k - 1) - 15(11k - 1) = 165k - 11 - 165k + 15 = 4$$

و بالتالي :

$$S_E = \{(15k - 1; 11k - 1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : n^{4k} \equiv 1 [5] \text{ ②}$$

5 عدد أولي حسب مبرهنة فيرما Fermat لدينا : $n^5 \equiv n [5]$

$$n^4 \equiv 1 [5] \text{ فإن } 5 \wedge n = 1$$

$$\mathbb{N} \text{ إذن } n^{4k} \equiv 1^k [5] \text{ مهما يكن } k \text{ من } \mathbb{N}$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : n^{4k} \equiv 1 [5] \text{ و بالتالي :}$$

$$n^x \equiv n^y [5] \text{ -أ ③}$$

$$(\exists k \in \mathbb{N}) : x - y = 4k \text{ لدينا } x \equiv y [4] \text{ إذن :}$$

$$\Rightarrow n^{x-y} \equiv 1 [5]$$

$$\Rightarrow \frac{n^x}{n^y} \equiv 1 [5]$$

$$\Rightarrow n^x \equiv n^y [5]$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) n^x \equiv n^y [10] \text{ -ب}$$

العددان n^x و n^y لهما نفس الزوجية إذن $n^x - n^y$ عدد زوجي :

$$\Rightarrow 2 / n^x - n^y$$

$$\Rightarrow n^x \equiv n^y [2]$$

$$\mathbf{n^x \equiv n^y [10]} \quad \text{فإن : } 2 \wedge 5 = 1 \quad \text{بما أن}$$

④ $\mathbf{n^y}$ و $\mathbf{n^x}$ لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

الزوج $(x; y)$ حل للمعادلة (E)

$$\text{إذن : } (\exists k \in \mathbb{Z}) : x = 15k - 1 \text{ و } y = 11k - 1$$

$$\Rightarrow x - y = 4k$$

$$\Rightarrow x \equiv y [4]$$

$$\Rightarrow \mathbf{n^x \equiv n^y [10]}$$

أي العددان $\mathbf{n^y}$ و $\mathbf{n^x}$ لهما نفس باقي القمة الإقليدية على 10

و بالتالي : $\mathbf{n^y}$ و $\mathbf{n^x}$ لهما نفس نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري.

التمرين الرابع

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right) = \left(+\infty + \frac{0}{n} \right) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{nxe^x} \right) \\ &= -\infty \left(1 + \frac{1}{0^-} \right) = +\infty \end{aligned}$$

② أ- الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{nxe^x} \right) = \left(1 + \frac{1}{0^-} \right) = -\infty$$

إذن

(C_n) يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار $-\infty$

ب- $(D): y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} - x \right) && \text{لدينا} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0 \end{aligned}$$

الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و (D)

$$f_n(x) - y = x + \frac{e^{-x}}{n} - x = \frac{e^{-x}}{n} > 0 \quad \text{لدينا}$$

(C_n) يوجد فوق (D)

وبالتالي

③ تغيرات الدالة f_n

$$f'_n(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n}$$

لدينا :

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{e^{-x}}{n} = 0$$

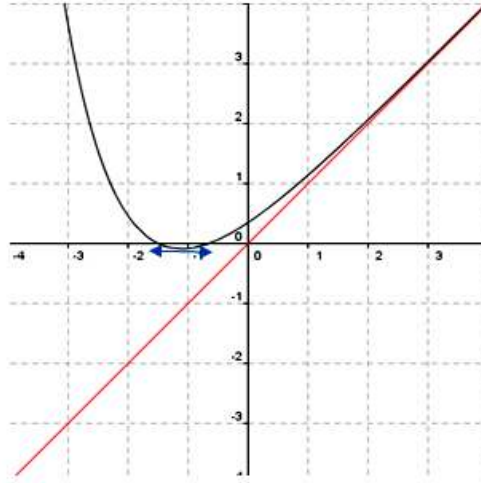
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{e^{-x}}{n}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = n$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln(n)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(n)$$

x	$-\infty$	$-\ln(n)$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	0	+
f_n	$+\infty$		$1 - \ln(n)$	$+\infty$

④ إنشاء المنحنى (C_n) 

⑤ أ- إذا كان $n \geq 3$ فإن $\frac{e}{n} < \ln(n)$

$$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \text{ و } \ln(n) \geq \ln(3)$$

$$\Rightarrow \frac{e}{n} \leq \frac{e}{3} < 1 \text{ و } \ln(n) \geq \ln(3) > 1$$

$$\Rightarrow \frac{e}{n} < \ln(n)$$

ب- الدالة f_n متصلة وتناقصية قطعاً على المجال $]-\infty ; -\ln(n)[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty > 0 \quad \text{ولدينا}$$

$$f_n(-\ln(n)) = 1 - \ln(n) < 0$$

حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_n على المجال: $]-\infty ; -\ln(n)[$

$$x_n < -\ln(n) \quad \text{أي}$$

- لدينا كذلك الدالة f_n متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]-\ln(n); +\infty [$

$$f_n(-\ln(n)) = 1 - \ln(n) < 0 \quad \text{ولدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty > 0$$

حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا y_n على المجال: $]-\ln(n); +\infty[$

$$\frac{e}{n} < \ln(n) \Rightarrow -\frac{e}{n} > -\ln(n) \quad \text{من جهة أخرى لدينا:}$$

$$\Rightarrow]-\frac{e}{n}; 0[\subset]-\ln(n); +\infty[$$

$$f_n(0) = \frac{1}{n} > 0 \quad \text{و لدينا}$$

$$f_n\left(-\frac{e}{n}\right) = \frac{-e}{n} + \frac{e^n}{n}$$

$$= \frac{e}{n} \left(e^{\frac{e}{n}-1} - 1 \right) < 0$$

$$-\frac{e}{n} < y_n < 0 \quad \text{إذن}$$

وبالتالي:

المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n بحيث: $x_n < -\ln(n)$ و $-\frac{e}{n} < y_n < 0$

$$\text{ج - } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(n) = -\infty \text{ و } x_n < -\ln(n) \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{e}{n} = 0 \text{ و } -\frac{e}{n} < y_n < 0 \quad \text{و لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0 \quad \text{إذن}$$

٦ أ- g متصلة علي اليمين في 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 - x \ln x = -1 - 0 = -1 = g(0)$$

$$\text{ب- } (\forall n \geq 3): g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = \frac{\ln(x)}{x_n}$$

بما أن $n \geq 3$ فإنه يوجد x_n حل للمعادلة $f_n(x) = 0$

$$\Rightarrow f_n(x_n) = x_n + \frac{e^{-x_n}}{n} = 0$$

$$\Rightarrow -x_n = \frac{e^{-x_n}}{n}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x_n} = ne^{x_n}$$

$$\Rightarrow g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = g(ne^{x_n}) = -1 - ne^{x_n} \ln(ne^{x_n})$$

$$= -1 + \frac{1}{x_n} [\ln(n) + x_n]$$

$$= -1 + \frac{\ln(n)}{x_n} + 1$$

$$= \frac{\ln(n)}{x_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{x_n} \quad \text{ج-}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x_n} = \left(\frac{-1}{-\infty}\right) = 0^+ \quad \text{لدينا}$$

بما أن g متصلة علي اليمين في 0 فإن $g(0) = -1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = g(0) = -1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -1 \quad \text{وبالتالي :}$$

التمرين الخامس

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 \quad \text{①}$$

$$0 \leq t \leq x \Rightarrow 0 \leq 2t \leq 2x \quad \text{لدينا}$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 + 2t \leq 1 + 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

$$F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} \quad \text{أ} \quad \textcircled{2}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2tdt}{1+2t} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1+2t}{1+2t} - \frac{1}{1+2t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x dt - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+2t} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \int_0^x \frac{2dt}{1+2t} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} [\ln(1+2t)]_0^x \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\ln(1+2x)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} &= \frac{2}{x^2} \left(\frac{x}{2} - \frac{\ln(1+2x)}{4} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} = F(x) \end{aligned}$$

إذن

$$\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1 \quad \text{ب-}$$

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 \Rightarrow \frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t$$

لدينا

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{tdt}{1+2x} \leq \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} \leq \int_0^x tdt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \times \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$$

- F متصلة على اليمين في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2x} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 = F(0)$$

إذن

3

$$v(x) = \frac{1}{1+2t} \quad \text{و} \quad u'(x) = 2t \quad \text{نضع :}$$

$$v'(x) = \frac{-2}{(1+2t)^2} \quad \text{و} \quad u(x) = t^2 \quad \text{إذن :}$$

$$\int_0^x \frac{2tdt}{1+2t} = \int_0^x u'(t)v(t)dt \quad \text{إذن :}$$

$$= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{1+2t} \right]_0^x + 2 \int_0^x t^2 \times \frac{1}{(1+2t)^2} dt$$

$$= \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

$$F'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \quad \text{أ- 4}$$

$$\int_0^x \frac{2tdt}{1+2t} = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} = \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2} - \frac{4x}{x^4} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt + \frac{2}{x^2} \left(\frac{x}{1+2x} \right)^2$$

$$= \frac{-2}{(1+2x)^2} - \frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt + \frac{2}{(1+2x)^2}$$

$$= -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

$$\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} \quad \text{ب-}$$

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{(1+2x)^2} \leq \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 \leq t^2$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{t^2 dt}{(1+2x)^2} \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \int_0^x t^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \times \frac{x^3}{3} \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{x^3} \times \frac{x^3}{3} \leq \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \frac{-4}{x^3} \times \frac{1}{(1+2x)^2} \times \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

ج- ليكن x من المجال $]0; 1[$

الدالة $F : t \rightarrow \frac{1}{t} - \frac{\ln(1+2t)}{2t^2}$ متصلة على المجال $]0; x[$ و متصلة على اليمين في 0

إذن F متصلة على $]0; x[$ و قابلة للاشتقاق على $]0; x[$ حسب مبرهنة التزايد المتناهية فإنه يوجد

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(c_x) \quad \text{عدد } c_x \text{ من المجال }]0; x[\text{ بحيث}$$

$$\frac{-4}{3} \leq F'(c_x) \leq \frac{-4}{3(1+2c_x)^2} \quad \text{ولدينا :}$$

$$0 < c_x \leq x \Rightarrow (1 + 2c_x)^2 \leq (1 + 2x)^2 \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2c_x)^2} \geq \frac{1}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3(1+2c_x)^2} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} \leq F'(c_x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{-4}{3} \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4}{3(1+2x)^2} = \frac{-4}{3} \quad \text{لدينا د-}$$

$$. F_d'(0) = \frac{-4}{3} \quad \text{وبالتالي } F \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين في } 0 \text{ و}$$

لا تنسونا من صالح دعائكم و مرحبا بملاحظاتكم.