(2 $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) لدينا $1-v_n=1-\dfrac{u_n-1}{u_n+1}=\dfrac{u_n+1-u_n+1}{u_n+1}=\dfrac{2}{u_n+1}$ وحيث أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\rangle 0$ فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1-v_n\rangle 0$

ب) ليكن n من $\mathbb{N}$: لدينا $1-v_n=\dfrac{2}{1+u_n}$ إذن $1+u_n=\dfrac{2}{1-v_n}$ أي $u_n=\dfrac{2}{1-v_n}-1=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

(3 أ) ليكن n من $\mathbb{N}$: $v_{(n+1)}=\dfrac{u_{(n+1)}-1}{u_{(n+1)}+1}=\dfrac{\dfrac{u_n-1}{3u_n+4}}{\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4}+1}=\dfrac{\dfrac{u_n-1}{3u_n+4}}{\dfrac{7u_n+7}{3u_n+4}}=\dfrac{u_n-1}{7(u_n+1)}=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\dfrac{1}{7}v_n$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{7}$

$v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}\quad ;\quad \forall n\in\mathbb{N}:v_n=v_0(q)^n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

ب) $\lim v_n=0$ (لأن $-1\langle\dfrac{1}{7}\langle 1$) إذن $\lim u_n=\lim\dfrac{1+v_n}{1-v_n}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$

التمرين الرابع (3 ن) : $card\Omega=C_{12}^3=220$

1) ليكن الحدث A : "الحصول على 3 كرات حمراء" لدينا $cardA=C_5^3=10$ إذن $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{1}{22}$

2) ليكن الحدث B : "الحصول على 3 كرات من نفس اللون " لدينا $cardB=C_5^3+C_4^3+C_3^3=15$ إذن $P(B)=\dfrac{cardB}{card\Omega}=\dfrac{3}{44}$

3) ليكن الحدث C : " الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل " و ليكن الحدث $\overline{C}$: " عدم الحصول على أية كرة حمراء"

لدينا $card\overline{C}=C_7^3=35$ وبالتالي $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{card\overline{C}}{card\Omega}=1-\dfrac{35}{220}=\dfrac{37}{44}$

التمرين الخامس (8ن) : $f(x)=x+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ ;\ x\in\mathbb{R}$

1) لدينا : $f(-x)=-x+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x+\dfrac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)}=-x+\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-\left(x+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)=-f(x)\quad ;\quad \forall x\in\mathbb{R}$

إذن f دالة فردية و بالتالي منحناها متماثل بالنسبة لأصل المعلم

(2 $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x+1-\dfrac{2}{e^x+1}=x+\dfrac{e^x+1-2}{e^x+1}=x+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$

(3 أ) $f'(x)=\left(x+1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)'=1+\dfrac{2\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=1+\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$ (f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$)

$f'(0)=1+\dfrac{2}{(1+1)^2}=1+\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{2}$

ب) لدينا $f'(x)=1+\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ و $e^x\rangle 0$: $\forall x\in\mathbb{R}$ إذن $\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)\rangle 0$ و بالتالي f تزايدية (قطعا) على $\mathbb{R}$

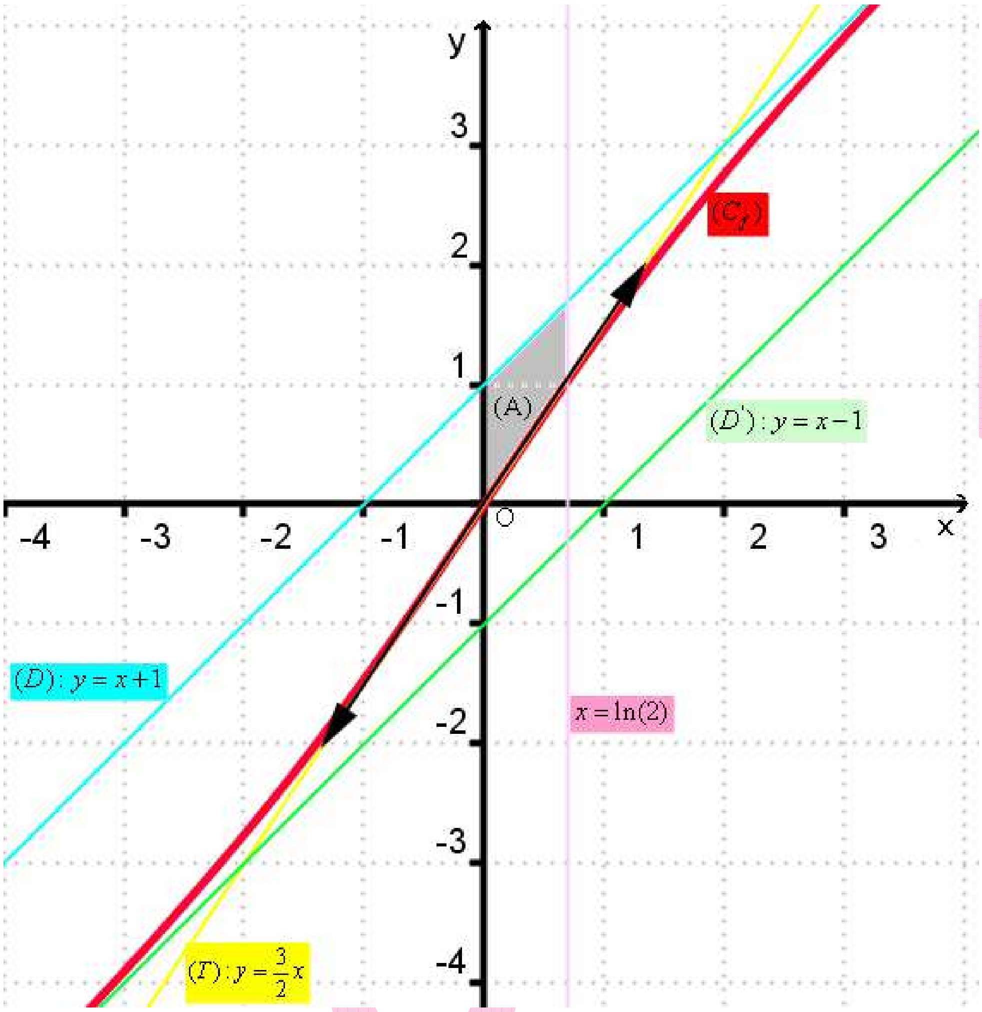
ج) $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{3}{2}x+0=\dfrac{3}{2}x$

(4 أ) لدينا $\lim\limits_{+\infty}f(x)=\lim\limits_{+\infty}x+1-\dfrac{2}{e^x+1}=+\infty$ $(\lim\limits_{+\infty}e^x=+\infty)$

ب) لدينا $\lim\limits_{+\infty}f(x)-(x+1)=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{-2}{e^x+1}=0$ إذن المستقيم $(D):y=x+1$ مقارب مائل لمنحنى f بجوار $+\infty$

ج) لدينا $0\langle \dfrac{-2}{e^x+1} = f(x)-(x+1) \; : \; \forall x\in\mathbb{R}$ إذن منحنى f يوجد تحت المستقيم (D)

5)



6) أ) الدالة H قابلةللإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\dfrac{1}{e^x \quad 1} \quad 1 \quad \dfrac{e^x}{e^x \quad 1} \quad 1 \quad \dfrac{(e^x+1)'}{e^x \quad 1} \quad \mathbb{R} : H'(x) \quad x$ إذن H أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$

ب) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+1}dx = H(\ln(2)) - H(0) = \ln(2)-\ln(3)+\ln(2) = 2\ln(2)-\ln(3) = \ln(4)-\ln(3)$

ج) $1\text{unité} = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| = "UA"$ (وحدة قياس المساحة)

$$(A) = \int_0^{\ln(2)} (x+1) - f(x)dx \times "UA" = 2\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+1}dx \times "UA" = 2\ln(4) - 2\ln(3)"UA" = 2\ln(\frac{4}{3})"UA"$$