الثانية بكالوريا علوم فيزيائية الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض	تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة الاستدراكية **2011**	الأستاذ : عبد العزيز حمداوي الثانوية التأهيلية عبد الكريم الخطابي أكَـــادير

التمرين الأول :

1) أ) **لنحل في** $\mathbb{R}$ **المعادلة :** $x^2-2x-3=0$ **:**

لدينا $x^2-2x-3=0$

لنحسب المميز Δ لهذه المعادلة : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$

بما أن $\Delta>0$ فإن للمعادلة حلان حقيقيان هما : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ و

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2-2x-3=0$ هي $\boxed{S=\{-1;3\}}$

ب) **لنحل في** $\mathbb{R}$ **المعادلة :** $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$ **:**

ليكن x عددا حقيقيا و S مجموعة حلول المعادلة $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$

$$\begin{aligned} x\in S &\Leftrightarrow e^x-\frac{3}{e^x}-2=0\\ &\Leftrightarrow \frac{(e^x)^2-3-2e^x}{e^x}=0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2-3-2e^x=0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x-3=0\end{aligned}$$

نضع $t=e^x$ فنحصل على المعادلة $t^2-2t-3=0$ و التي حلاها هما 1- و 3 حسب السؤال أعلاه .

إذن $e^x=3$ أو $e^x=-1$.

و بما أن $e^x>0$ مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن $e^x=3$ أي $x=\ln 3$ و بالتالي فإن حل المعادلة $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$ هو $\ln 3$

و منه $\boxed{S=\{\ln 3\}}$

2) **لنحل في** $\mathbb{R}$ **المتراجحة :** $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$ **:**

ليكن x من $\mathbb{R}$ ، هذه المتراجحة تكافئ : $e^{x+1}\geq e^{-x}$

و لأن الدالة $x\mapsto e^x$ دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $e^{x+1}\geq e^{-x}$ تكافئ $x+1\geq -x$

يكافئ $x+1+x\geq 0$

أي $2x+1\geq 0$

يعني أن $2x\geq -1$

ومنه فإن $x\geq\frac{-1}{2}$

و بالتالي فإن $\boxed{S=\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[}$

التمرين الثاني :

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$

لتكن S مجموعة حلول هذه المعادلة .

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times18=36-72=-36$

بما أن $\Delta<0$ فإن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1=\frac{6-6i}{2}=3-3i$ و $z_2=\frac{6+6i}{2}=3+3i$

و بالتالي فإن : $\boxed{S=\{3-3i\,;3+3i\}}$

2) أ) لنكتب على الشكل المثلثي كل من العددين a و b :

لدينا : $a=3+3i$ إذن $|a|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ و منه :

$$a=3+3i=3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}+\frac{3}{3\sqrt{2}}i\right)$$

$$=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$$

و منه فإن $\boxed{a=\left[3\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}$

و لدينا : $b=3-3i$ إذن $|b|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ و منه :

$$b=3-3i=3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}-\frac{3}{3\sqrt{2}}i\right)$$

$$=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

و بالتالي فإن $\boxed{b=\left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}$

ب) لنبين أن لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6 :

نعلم أن التمثيل العقدي للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هو : $z'=z+z_{\vec{u}}$

و لدينا B' صورة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ ، و ليكن b' لحق النقطة B' ، إذن سيكون لدينا : $b'=b+a$ (باعتبار أن a هو لحق المتجهة $\overrightarrow{OA}$ لأن : $z_{\overrightarrow{OA}}=z_A-z_O=a-0=a$)

إذن سنحصل على : $b'=3-3i+3+3i$ أي : $b'=6$

و منه فإن b' لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6 .

ج) لنبين أن $\frac{b-b'}{a-b'}=i$ ثم نستنتج أن المثلث $AB'B$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في B'

$$\frac{b-b'}{a-b'}=\frac{3-3i-6}{3+3i-6}=\frac{-3-3i}{-3+3i}=\frac{-3(1+i)}{-3(1-i)}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

إذن : $\boxed{\frac{b-b'}{a-b'}=i}$

$(\dfrac{b-b'}{a-b'}=i=1(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})=\left[1;\dfrac{\pi}{2}\right]$ لأن) $\left(\widehat{\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}}\right)=\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{B'B}}}{z_{\overrightarrow{B'A}}}\right)=\arg\left(\dfrac{b-b'}{a-b'}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن المثلث $AB'B$ قائم الزاوية في B' .

من جهة أخرى ، $\dfrac{b-b'}{a-b'}=i$ يعني أن $\left|\dfrac{b-b'}{a-b'}\right|=1$ و منه فإن : $\dfrac{|b-b'|}{|a-b'|}=1$

أي $|b-b'|=|a-b'|$ و بالتالي فإن $B'B=B'A$. إذن المثلث $AB'B$ متساوي الساقين .

من كل هذا نستنتج أن المثلث $AB'B$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في B' .

د) لنستنتج أن الرباعي $OAB'B$ مربع :

لدينا النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ ، إذن $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{B'B}$ و منه الرباعي $OAB'B$ متوازي أضلاع ، من جهة أخرى $OAB'B$ له زاويق قائمة و ضلعان متتابعان متقايسان ، إذن الرباعي $OAB'B$ مربع .

التمرين الثالث :

لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{1+15u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) أ) لنتحقق من أن : $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$:

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{1+15u_n}$

إذن :

$$u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{6u_n}{1+15u_n}-\frac{1}{3}=\frac{3\times 6u_n}{3\times(1+15u_n)}-\frac{1+15u_n}{3\times(1+15u_n)}=\frac{18u_n-1-15u_n}{3\times(1+15u_n)}=\frac{3u_n-1}{3\times(1+15u_n)}$$

$$=\frac{3\left(u_n-\frac{1}{3}\right)}{3\times(1+15u_n)}$$

$$=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}$$

و منه فإن $\boxed{u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}}$ $\boxed{\text{لكل}}$ $\boxed{n}$ $\boxed{\text{من}}$ $\boxed{\mathbb{N}}$.

ب) لنبين بالترجع أن : $u_n>\dfrac{1}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$:

لدينا $u_0=1$ إذن $u_0>\frac{1}{3}$ أي أن العلاقة صحيحة من أجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نفترض أن $u_n>\frac{1}{3}$ و نبين أن $u_{n+1}>\frac{1}{3}$

لدينا : $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\dfrac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$، و بما أن $u_n>\frac{1}{3}$ فإن : $u_n-\frac{1}{3}>0$ و كذلك $15u_n+1>0$

و بالتالي فإن $\dfrac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}>0$ و هذا يعني حتما أن : $u_{n+1}-\frac{1}{3}>0$ أي : $u_{n+1}>\frac{1}{3}$

إذن حسب مبدأ الترجع نستنتج أن $u_n>\frac{1}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) لنبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ ثم لنكتب v_n بدلالة n :

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n=1-\frac{1}{3u_n}$ إذن :

$$v_{n+1}=1-\frac{1}{3u_{n+1}}=1-\frac{1}{3\times\left(\frac{6u_n}{1+15u_n}\right)}=1-\frac{1}{\frac{18u_n}{1+15u_n}}=1-\frac{1+15u_n}{18u_n}=\frac{18u_n-1-15u_n}{18u_n}$$

و منه فإن :

$$v_{n+1}=\frac{3u_n-1}{18u_n}=\frac{3u_n}{18u_n}-\frac{1}{18u_n}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18u_n}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3u_n}\right)$$

و بالتالي فإن : $\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{6}v_n}$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$.

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n=v_0\times q^n$ حيث v_0 حدها الأول و q أساسها (صيغة الحد العام لمتتالية هندسية)

حساب v_0 : $v_0=1-\frac{1}{3u_0}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

و منه فتعبير v_n بدلالة n هو كالتالي : $\boxed{v_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

3) لنبين أن $u_n=\dfrac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n=1-\frac{1}{3u_n}$ ، إذن : $\frac{1}{3u_n}=1-v_n$ أي : $3u_n=\frac{1}{1-v_n}$

إذن : $u_n=\dfrac{1}{3(1-v_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن $u_n=\dfrac{1}{3\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أي $\boxed{u_n = \dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

بما أن $-1<\dfrac{1}{6}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=0$ و بالتالي فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}=\dfrac{1}{3}$ و منه فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{3}}$

التمرين الرابع :

I. لدينا g دالة عددية معرفة على $I=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-1+\ln x$

(1 أ) **لنبين أن** $g'(x)=\dfrac{x+1}{x}$ **لكل** x من I .

لدينا $g(x)=x-1+\ln x$ لكل x من I ،

الدالة g دالة قابلة للاشتقاق على المجال I لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I ،

و لكل x من I لدينا : $g'(x)=\left(x-1+\ln x\right)'$

أي لكل x من I $g'(x)=1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}$

إذن لكل x من I $\boxed{g'(x)=\dfrac{x+1}{x}}$

ب) لنبين أن الدالة g **تزايدية على** I **:**

بما أن $x\in]0;+\infty[$ فإن $x>0$ و $x+1>0$ و بالتالي $\dfrac{x+1}{x}>0$

إذن لكل x من I $g'(x)>0$ و هذا يعني أن الدالة g تزايدية على I .

(2 لنستنتج إشارة $g(x)$ **على** I .

لدينا لكل x من I $g'(x)>0$ إذن جدول تغيرات الدالة g هو كالتالي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}(x-1+\ln x)$$
$$=0-1+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1+\ln x)$$
$$=+\infty-1+(+\infty)=+\infty$$

$$g(1)=1-1+\ln1=0$$

من خلال جدول تغيرات الدالة g يتضح أن $g(x)\geq0$ على $[1;+\infty[$ و أن $g(x)\leq0$ على $]0;1]$

(يمكن الوصول إلى نفس الاستنتاج اعتمادا على رتابة الدالة g)

II.

1) أ) لنبين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و نأول هندسيا النتيجة :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=(-1)\times(-\infty)$$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

التأويل الهندسي : من خلال النتيجة أعلاه نستنتج أن منحنى الدالة f يقبل محور الأراتيب مقاربا رأسيا بجوار $+\infty$

ب) لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **و أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ **:**

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=1\times(+\infty)=+\infty$

ومنه فإن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ **)**

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=1\times 0=0$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$)

ج) الاستنتاج : بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ فإن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ في اتجاه محور الأفاصيل .

2) أ) لنبين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ **لكل** x **من** I **:**

f دالة قابلة للاشتقاق على I ، و لكل x من I لدينا :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)'=\left(\frac{x-1}{x}\right)'\times\ln x+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times(\ln x)'\\&=\frac{(x-1)'\times x-(x-1)\times x'}{x^2}\times\ln x+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\\&=\frac{x-x+1}{x^2}\times\ln x+\frac{x-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{\ln x+x-1}{x^2}\end{aligned}$$

إذن لكل x من I $\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}}$

ب) استنتاج رتابة الدالة f

نعلم أن $g(x)\geq 0$ على $[1;+\infty[$ و أن $g(x)\leq 0$ على $]0;1]$ ، إذن $f'(x)\geq 0$ على $[1;+\infty[$ و $f'(x)\leq 0$ على $]0;1]$

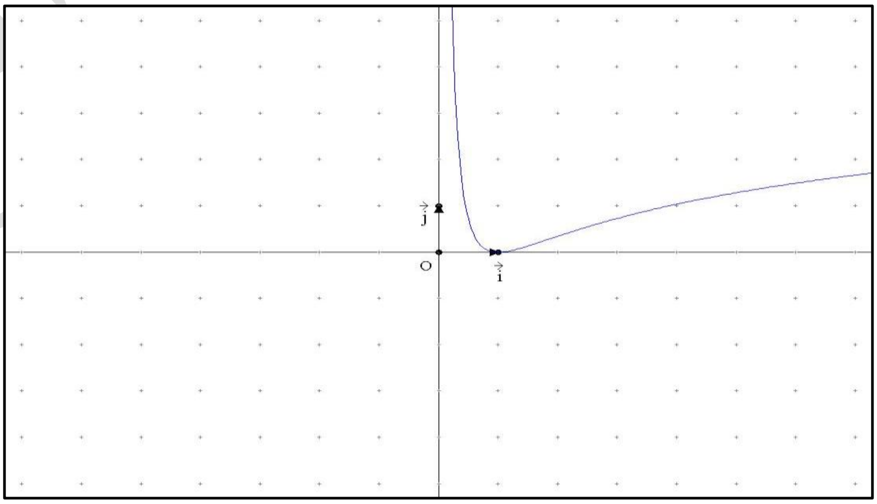
و بالتالي فإن الدالة f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$ وتناقصية على المجال $]0;1]$.

ج) جدول تغيرات الدالة f على I :

من خلال ما سبق فإن جدول تغيرات الدالة f على I هو كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) إنشاء المنحنى (C)



3) أ) لنبين أن $H:x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2$ **دالة أصلية للدالة** $h:x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ **على المجال** I

الدالة H قابلة للاشتقاق على I و لكل x من I لدينا : $H'(x)=\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln x$

و منه فإن لكل x من I : $H'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ و هذا يعني أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h على I .

ب) لدينا $H:x\mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال I و 1 و e عنصرين من I

إذن $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\left(\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)=\frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{2}$$

و منه $$\boxed{\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}}$$

ج) المكاملة بالأجزاء

لحساب التكامل $\int_1^e \ln x\,dx$ نستعمل تقمية المكاملة بالأجزاء حيث نضع :

$u(x)=\ln x$ و $v'(x)=1$ إذن $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ و $v(x)=x$

و منه

$$\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}\,dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e 1\,dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e$$

و بالتالي فإن $$\int_1^e \ln x\,dx=(e\ln e-1\ln 1)-(e-1)=e-0-e+1=1$$

إذن $$\boxed{\int_1^e \ln x\,dx=1}$$

4) أ) **لنتحقق أن** $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$ **لكل** x **من** I :

لكل x من I لدينا : $$f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x=\frac{x\ln x-\ln x}{x}=\frac{x\ln x}{x}-\frac{\ln x}{x}$$

إذن لكل x من I $$\boxed{f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}}$$

ب) ليكن Δ حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ إذن مساحة هذا الحيز هي : $A(\Delta)=\int_1^e |f(x)|dx\times ua$

و لأن $f(x)\geq 0$ لكل x من I (أنظر جدول التغيرات و كذا المنحنى أعلاه) فإن $A(\Delta)=\int_1^e f(x)dx\times ua$

$$A(\Delta)=\int_1^e f(x)dx\times ua=\int_1^e\left(\ln x-\frac{\ln x}{x}\right)dx\times ua$$

و منه فإن

$$A(\Delta)=\int_1^e \ln x dx\times ua-\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx\times ua=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times ua=\frac{1}{2}\times 1cm^2$$

و بالتالي $$\boxed{A(\Delta)=0,5\,cm^2}$$