



**التمرين الأول: (3,5 ن)**

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

(I) لكل  $a$  و  $b$  من المجال  $I = [1; +\infty[$  نضع :  $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$

① بين أن :  $\perp$  قانون تركيب داخلي في  $I$  . 0,50 ن

② بين أن القانون  $\perp$  تبادلي و تجميعي في  $I$  . 0,50 ن

③ بين أن :  $\perp$  يقبل عنصرا محايدا في  $I$  و يجب تحديده . 0,25 ن

(II) نذكر أن :  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة. لتكن :  $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

① بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$  0,50 ن

② نعتبر التطبيق  $\varphi$  المعرف بما يلي :  $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow E$   
 $x \rightarrow M(x)$

Ⓐ بين أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  نحو  $(E, \times)$  . 0,50 ن

Ⓑ استنتج بنية  $(E, \times)$  . 0,50 ن

Ⓒ بين أن المجموعة :  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$  زمرة جزئية من  $(E, \times)$  . 0,75 ن

**التمرين الثاني: (3,5 ن)**

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد منظم و مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

(I) نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(E) : z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

① Ⓐ تحقق أن العدد  $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$  حل للمعادلة  $(E)$  . 0,50 ن

Ⓑ بين أن الحل الثاني للمعادلة هو  $z_2 = 3z_1$  0,50 ن

(II) نعتبر ثلاث نقط  $A$  و  $B$  و  $\Omega$  مختلفة مثنى مثنى ألقاها على التوالي :  $a$  و  $b$  و  $\omega$  .

ليكن  $r$  الدوران الذي مركزه  $\Omega$  و زاويته  $\frac{\pi}{3}$  .

نضع :  $P = r(A)$  و  $B = r(Q)$

ليكن العدد العقدي  $p$  لحق النقطة  $P$  و العدد العقدي  $q$  لحق النقطة  $Q$  .

① Ⓐ بين أن :  $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$  و  $q = \omega + e^{-\frac{i\pi}{3}}(b - \omega)$  0,50 ن

Ⓑ بين أن :  $\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$  0,25 ن

③ بين أن :  $\frac{p-a}{q-b} = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$  0,50 ن

② نفترض أن :  $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

① بين أن :  $APQB$  متوازي أضلاع. 0,75 ن

② بين أن :  $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  و استنتج أن الرباعي  $APQB$  مستطيل. 0,75 ن

**التمرين الثالث : (3,0 ن)**

① ① تحقق أن : 503 عدد أولي. 0,25 ن

② بين أن  $7^{502} \equiv 1[503]$  ثم استنتج أن  $7^{2008} \equiv 1[503]$ . 0,75 ن

② نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة :  $49x - 6y = 1$  (E) 0,50 ن

علما أن الزوج (1; 8) حل خاص للمعادلة (E) ، حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل.

③ نضع :  $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$

① بين أن الزوج  $(7^{2006}, N)$  حل للمعادلة (E). 0,25 ن

② استنتج أن  $N$  يقبل القسمة على 2012 0,25 ن

③ بين أن  $N \equiv 0[4]$  و  $N \equiv 0[503]$  1,00 ن

**التمرين الرابع : (7,5 ن)** (I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $[0; +\infty[$  بما يلي :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

① أدرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$  0,50 ن

② استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $[0; +\infty[$ . 0,50 ن

(II) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

① بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  1,00 ن

② بين أنه لكل عدد حقيقي  $x$  لدينا :  $f'(x) = e^x g(e^{-x})$  0,50 ن

③ ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  0,50 ن

④ أنشئ  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  و  $(\mathcal{C}')$  الممثل للدالة  $(-f)$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  1,00 ن

نقبل أن  $-0,7$  قيمة مقربة لأفصول نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

⑤ بين أن لكل  $x$  من  $] -1; 0[$  لدينا :  $0 < f'(x) < g(e)$  0,75 ن

⑥ بين أن المعادلة  $f(x) + x = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ . و أن :  $-1 < \alpha < 0$  0,75 ن

⑦ نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :  $\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

① بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 \leq u_n \leq 0$  ن 0,50

② بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$  ن 0,50

③ استنتج أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$  ن 0,50

④ علما أن :  $g(e) < 0,6$  أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ن 0,50

### التمرين الخامس : (2,5 ن)

نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بما يلي :  $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left( \frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$

① أحسب  $F(1)$  . ن 0,25

② بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و احسب  $F'(x)$  . ن 0,50

③ استنتج أن لكل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  لدينا :  $F(x) = 0$  ن 0,50

④ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  لدينا : ن 0,50

$$F(x) = \left( \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

④ بين أن :  $(\forall x > 0) : \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$  ن 0,25

⑤ استنتج أن :  $(\forall x > 0) : \ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$  ن 0,50