



الصفحة
1
4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011
الموضوع

9	المعامل	RS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجابة		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (أ) أو المصنط

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات(2.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية..... (4ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع: $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

0.5 ن (أ) بين أن $*$ قاتون تركيب داخلي في I .

0.5 ن (ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي.

0.5 ن (ج) بين أن $(I, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5 ن 2- بين أن زمرة $(I, *)$ تبادلية.

3- نعتبر المجموعتين $K = \left\{ \frac{1}{1+2^n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ و $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$

0.5 ن (أ) بين أن H زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{R}^+, \times)

0.5 ن (ب) نعتبر التطبيق: $\varphi: H \rightarrow I$
 $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. بين أن φ تشاكل من (H, \times) نحو $(I, *)$

0.5 ن (ج) استنتج أن K زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$

التمرين الثاني: (2.5 نقط)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق: $10^x \equiv 2 \pmod{19}$

0.25 ن (أ) تحقق أن: $10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$

0.5 ن (ب) بين أن: $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$

2- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $x+1$

0.75 ن (أ) بين أن: $10^d \equiv 1 \pmod{19}$

0.5 ن (ب) بين أن: $d = 18$

0.5 ن (ج) استنتج أن: $x \equiv 17 \pmod{18}$

التمرين الثالث: (4 نقط)

- الجزء الأول: نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $(E) \quad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$
- 0.5
1- تحقق أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E)
- 0.5
2- حدد العددين العقديين α و β بحيث:
- $(\forall z \in \mathbb{C}) : z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$
- 0.5
3- (أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $5-12i$
- 0.5
(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (E)

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد منظم مباشر.

- نعتبر النقط A و B و C التي أحاطها على التوالي هي: $a = -1+3i$ و $b = -2i$ و $c = 2+i$
- 0.5
1- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C
- 2- نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران R_2 الذي مركزه A وزاويته $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
- لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و صورتها بالدوران R_1 و M_2 صورتها بالدوران R_2
- 0.5
(أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران R_1 هي: $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$
- 0.5
(ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z
- 0.5
(ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثابتة.

التمرين الرابع: (6 نقط)

- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x + \ln x$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (نأخذ: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$)
- 1- احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
- 0.25
2- (أ) ضع جدول تغيرات الدالة f
- 0.75
(ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو مجال \mathcal{I} يتم تحديده، ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .
- 0.75
3- احسب $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (C) و (C') منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})
- 0.5
4- (أ) احسب التكامل $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$ (يمكنك وضع: $t = f^{-1}(x)$)
- 0.5
(ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين (C') و المستقيمت ذات المعادلات: $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$

5- نعتبر المعادلة : $(E_n) : x + \ln x = n$

(أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n 0.25

(ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ 0.5

6- (أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f(x_n) \leq f(n)$ ثم استنتج أن : $x_n \leq n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) 0.5

(ب) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n - \ln(n) \leq x_n$ 0.5

(ج) احسب النهايتين: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n}$ 0.5

التمرين الخامس: (4 نقط)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

1- بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n) = 0$ 0.5

2- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (ضع $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$) 0.75

3- (أ) تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$ 0.5

(ب) استنتج أن: $\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$ 0.5

4- (أ) بين أن: $1 + \ln(1 - \alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$ 0.5

(ب) بين أن: $0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1 - \alpha_n)}$ ($\forall n \geq 2$) 0.5

(ج) استنتج أن: $\ell = 1 - e^{-1}$ 0.75

انتهى