تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم الرياضية ، الإمتحان الوطني دورة يوليوز 2010

تقديــــم: ذ.العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

==

التمريـــــن 1:

1.نبين أن E جزء مستقر $(M_3(R),\times)$.

ليكن M و N عنصرين من E ،

إذن يوجد عددان حقيقيان x وy حيث $M=M(x)$ و $N=M(y)$.

لدينا : $M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1&1&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\y&1&0\\y^2&2y&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\(x+y)^2&2(x+y)&1\end{pmatrix}$

$= M(x+y)$

إذن لكل M و N من E : $M\times N\in E$

ومنه

E جزء مستقر $(M_3(R),\times)$.

2.أ. نبين أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ و $(E,\times)$.

. ليكن x و y من R . لدينا :

$$\varphi(x+y)=M(x+y)=M(x)\times M(y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

إذن لكل x و y من R لدينا : $\varphi(x+y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$.

ومنه : φ تشاكل من $(R,+)$ و $(E,\times)$.

. لكل عنصر M من E يوجد عدد حقيقي x حيث $M=M(x)$ وذلك حسب تعريف M.

ومنه φ تطبيق شمولي من R و E .

. ليكن x و y من R ، لدينا

$$\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow M(x)=M(y)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=y\\x^2=y^2\\2x=2y\end{cases}$$
$$\Rightarrow x=y$$

إذن لكل x و y من R حيث $\varphi(x)=\varphi(y)$ لدينا $x=y$.

ومنه φ تطبيق تباين من R و E .

وعليه فإن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ و $(E,\times)$.

2.ب.نستنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية :

نعلم أن $(R,+)$ زمرة تبادلية وحيث أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ و $(E,\times)$ فإن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .

2.ج. دد مقلوب ا صفوفة $M(x)$ حيث x من R :

ليكن x عددا حقيقيا ،

اثل x $(R,+)$ هو $(-x)$.

ا أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ و $(E,\times)$ فإن اثل $\varphi(x)$ $(E,\times)$ هو $\varphi(-x)$.

ومنه

مقلوب ا صفوفة $M(x)$ هو ا صفوفة $M(-x)$.

2.د. لـ الموعة E ا عادلة $A^5.X=B$ حيث $A=M(2)$ و $B=M(12)$ و $A^5=A\times A\times A\times A\times A$:

ليكن X عنصرا من E .

إذن $X=M(x)$ حيث x عنصر من R .

ا أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ و $(E,\times)$ فإن φ^{-1} تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ و $(R,+)$.

ولدينا لكل x من R : $\varphi^{-1}(M(x))=x$. إذن :

$$\begin{aligned}
A^5X=B &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(A^5X)=\varphi^{-1}(B)\\
&\Leftrightarrow \varphi^{-1}(A^5)+\varphi^{-1}(X)=\varphi^{-1}(B)\\
&\Leftrightarrow \varphi^{-1}(A)+\varphi^{-1}(A)+\varphi^{-1}(A)+\varphi^{-1}(A)+\varphi^{-1}(A)+\varphi^{-1}(X)=\varphi^{-1}(B)\\
&\Leftrightarrow 5\times\varphi^{-1}(A)+\varphi^{-1}(X)=\varphi^{-1}(B)\\
&\Leftrightarrow 5\times 2+x=12\\
&\Leftrightarrow x=2\\
&\Leftrightarrow X=M(2)
\end{aligned}$$

ومنه :

موعة حلول ا عادلة هي $S=\{M(2)\}$

3.ب. أن الموعة $F=\{M(\ln x)/\ x\in R_+^*\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E,+)$.

. العنصر ا يا $(R,+)$ هو العدد ا قيقي 0 .

ا أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ و $(E,\times)$ فإن العنصر ا يا $(E,\times)$ هو $\varphi(0)$ أي ا صفوفة $M(0)$.

ولدينا $M(0)=M(\ln 1)$ والعدد 1 عنصر من R_+^* إذن $M(0)\in F$ إذن F غ فارغة .

. ليكن a و b عنصرين من F .

إذن: $a=M(\ln x)$ و $b=M(\ln y)$ حيث x و y عنصران من $]0;+\infty[$.

مقلوب ا صفوفة b هو ا صفوفة $b^{-1}=M(-\ln y)$.

لدينا : $a\times b^{-1}=M(\ln x)\times M(-\ln y)=M(\ln x-\ln y)=M\left(\ln\frac{x}{y}\right)$

وحيث أن $\frac{x}{y}$ عنصر من $]0;+\infty[$ فإن $M\left(\ln\frac{x}{y}\right)$ عنصر من F .

وعليه فإن

F زمرة جزئية للزمرة $(E,+)$.

التمريـ - - - ـن 2:

1.أ.نتحقق أن العدد العقدي $a=1+i\left(2-\sqrt{3}\right)$ حل للمعادلة $z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$:

تعويض تبسيط ...

1.ب.نستنتج ا ل الثا b للمعادلة (E) :

نعلم أن موع ا ل هو : $a+b=4i$. إذن : $b=4i-a$

ومنه

ا ل الثا هو $b=-1+i\left(2+\sqrt{3}\right)$.

2.أ.نبـ أن $a^2=4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$:

لدينا : $a^2=\left(1+i\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^2=-6+4\sqrt{3}+4i-2i\sqrt{3}=4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$

ومنه

$a^2=4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$

2.ب.لنستنتج شكلا مثلثيا للعدد a :

لدينا $a^2=4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$ إذن : العدد a جذر مربع للعدد $4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

ومنه : $a=2\sqrt{2-\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $a=-2\sqrt{2-\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

وحيث أن ا زئ ا قيقي والتخيلي للعدد a موجبان فإن $a=2\sqrt{2-\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3.أ.لنحدد ق مركز الدائرة :

$[AB]$ قطر الدائرة (Γ) . إذن ق مركز الدائرة (Γ) هو $\omega=\frac{a+b}{2}$

ومنه

ق مركز الدائرة هو $\omega=2i$.

3.ب.بـ أن O و C نقطتان من (Γ) :

شعاع الدائرة (Γ) هو $R=\frac{|b-a|}{2}=\frac{\left|2-2i\sqrt{3}\right|}{2}=2$

ا أن $\Omega C=|c-2i|=\left|2e^{i\frac{\pi}{7}}\right|=2$ فإن $C\in(\Gamma)$.

ا أن $\Omega O=|\omega|=|2i|=2$ فإن $O\in(\Gamma)$.

3.ج.نبـ أن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ يلي صرف :

ا أن C تنتمي إ الدائرة ا أحد أقطارها $[AB]$ و ا الف النقطت A و B فإن ا ثلث ABC قائم الزاوية C

ومنه قياس للزاوية ا وجهة $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ هو عمدة لعدد عقدي يلي صرف .

وعليه فإن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ يلي صرف .

التمريـ ـ ـ ـن 3:

أ. دد قيم X :

نسحب عشوائيا الكرات واحدة تلو الأخرى ونقف حا ا تظهر أول كرة بيضاء .

ليكن X عدد الكرات ا سحوبة. قيم X هي : 1 ، 2 و 3 .

ب. سب احتمال $p(X=1)$:

ا دث $(X=1)$ هو ا صول على كرة بيضاء ا رة الأو :

$$p(X=1)=\frac{card(X=1)}{card\Omega}=\frac{A_{10}^1}{A_{12}^1}=\frac{5}{6}$$

ج. نبـ أن $p(X=2)=\frac{5}{33}$:

ا دث $(X=2)$ هو ا صول على كرة راء ا رة الأو وكرة بيضاء ا رة الثانية : $p(X=2)=\frac{card(X=2)}{card\Omega}=\frac{A_2^1A_{10}^1}{A_{12}^2}=\frac{5}{33}$

1.د. سب احتمال ا دث $(X=3)$:

ا دث $(X=3)$ هو ا صول على كرة راء ا رة الأو والثانية وكرة بيضاء ا رة الثالثة:

$$p(X=3)=\frac{card(X=3)}{card\Omega}=\frac{A_2^2.A_{10}^1}{A_{12}^3}=\frac{2\times10}{12\times11\times10}=\frac{1}{66}$$

2.أ. نبـ أن $E(X)=\frac{13}{11}$:

قانون احتمال X هو :

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

إذن : الأمل الرياضي للمتغ العشوائي X هو : $E(X)=1.\frac{5}{6}+2.\frac{5}{33}+3.\frac{1}{66}$

ومنه

الأمل الرياضي للمتغ العشوائي X هو : $E(X)=\frac{13}{11}$

2.ب. دد $E(X^2)$ سب $V(X)$:

$$E(X^2)=1^2.\frac{5}{6}+2^2.\frac{5}{33}+3^2.\frac{1}{66}=\frac{52}{33}$$

نعلم أن $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

إذن $V(X)=\frac{52}{33}-\left(\frac{13}{11}\right)^2=\frac{65}{363}$

ومنه :

$V(X)=\dfrac{65}{363}$	و	$E(X^2)=\dfrac{52}{11}$

مسألـــــــة :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & , \quad 0\le x \prec 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

الجزء 1:

1.لنبين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1 :

لدينا بوضع $X=1-x$: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{X\to0^+}\dfrac{1}{1-\ln X}$

و بما أن $\lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty$ فان $\lim\limits_{X\to0^+}\dfrac{1}{1-\ln X}=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(0)$

ومنه f متصلة على اليسار في 1 .

2.لندرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1 :

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{(x-1)(1-\ln(1-x))}\\&=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{-X(1-\ln X)} \qquad (X=1-x)\\&=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{-X+X\ln X}\end{aligned}$$

و بما أن X يؤول الى 0^+ فيمكن اعتبار X من $]0,1[$

وبالتالي : $-X+X\ln X\prec 0$ أي: $\lim\limits_{X\to0^+}-X+X\ln X=0^-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 .

3.ندرس تغيرات f على I :

الدالة f قابلة للاشتقاق على$]0,1[$ و لكل x من $]0,1[$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{-(1-\ln(1-x))'}{(1-\ln(1-x))^2}=\frac{-1}{(1-x)(1-\ln(1-x))^2}\prec 0$$

ومنه f تناقصية قطعا على$]0,1[$.

وحيث أن f متصلة على اليسار في 1 فإن f تناقصية قطعا على$[0,1]$.

جدول تغيرات الدالة f هو :

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	↘	1 0

4.أ- نب أن نحـ f نقطة انعطاف وحيدة افصو ا $\frac{e-1}{e}$:

$$f''(x)=\frac{-(1-\ln(1-x))^2+2(1-x).(1-\ln(1-x)).\frac{1}{1-x}}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^4}=\frac{(1-\ln(1-x))(1+\ln(1-x))}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^4}$$

ا ان $1-x\prec 1$ فان $\ln(1-x)\prec 0$ ومنه : $0\prec 1-\ln(1-x)$

و بالتا إشارة $f''(x)$ هي اشارة $1+\ln(1-x)$ ولدينا :

$$\begin{aligned} f''(x)=0 \quad &\Leftrightarrow 1+\ln(1-x)=0\\ &\Leftrightarrow \ln(1-x)=-1\\ &\Leftrightarrow 1-x=\frac{1}{e}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

ولدينا :

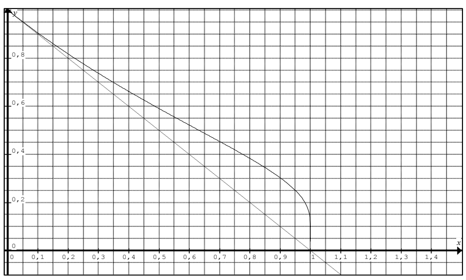
$$\begin{aligned} f''(x)\succ 0 \quad &\Leftrightarrow \ln(1-x)\succ -1\\ &\Leftrightarrow 1-x\succ\frac{1}{e}\\ &\Leftrightarrow x\prec\frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

ا شتقة الثانية للدالة f تنعدم وتغ إشارتا عند $\frac{e-1}{e}$.

ومنه

منحـ f يقبل نقطة انعطاف وحيدة افصو ا $\frac{e-1}{e}$.

4.ب- إنشاء منحـ f :



5.نبـ وجود عدد حقيقي وحيد α من I حيث $f(\alpha)=\alpha$.

نعتـ الدالة العددية φ ا عرفة على I ا يلي : $\varphi(x)=f(x)-x$

الدالتان : f و $x\mapsto -x$ تناقصيتان على I اذن φ تناقصية قطعا على I. (مـوع دالتـ ما نفس الرتابة على ال)

ولدينا : φ متصلة على I (مـوع دالتـ متصلتـ على ال)

ولدينا : $\varphi(0)\times\varphi(1)=-1\prec 0$

إذن : حسب مـ هنة القيم الوسطية ا عادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α $]0,1[$.

ومنه

يوجد عنصر وحيد α I حيث $f(\alpha)=\alpha$

6.أ.نبـ أن f تقابل من I و I :

ا أن f متصلة وتناقصية قطعا على الا I فإن f تقابل من I و الا $[f(1)\,;\,f(0)]=[0;1]$.

6.ب.لنحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I :

ليكن x و y عنصرين من I حيث $f^{-1}(x)=y$.

. إذا كان $x=0$ فإن $y=1$ لأن $f(1)=0$.

.نفترض أن $x\neq 0$. لدينا :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x)=y &\Leftrightarrow f(y)=x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln(1-y)}=x \\ &\Leftrightarrow \ln(1-y)=\frac{x-1}{x} \\ &\Leftrightarrow y=1-e^{\frac{x-1}{x}} \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=1-e^{\frac{x-1}{x}} \quad ; \quad x\in]0\,;1] \\ f^{-1}(0)=1 \end{cases}$$

ا زء 2:

.ليكن n من N، لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt-\int_0^1 t^n f(t)dt=\int_0^1 t^n(t-1)f(t)dt$

وحيث أن $t\in[0\,;1]$ فإن $t-1\leq 0$ و بالتا $t^n(t-1)f(t)\leq 0$ $\int_0^1 t^n(t-1)f(t)dt\leq 0$

ومنه $I_{n+1}-I_n\leq 0$ لكل n من N .

وعليه فإن ا تتالية (I_n) تناقصية .

. لدينا $f(t)\geq 0$ لكل t من $[0\,;1]$.إذن $I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt\geq 0$ لكل n من N .

ومنه (I_n) مصغورة بالعدد 0.

ا أن (I_n) تناقصية ومصغورة فإنا متقاربة .

2.نبـ أن $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ لكل n من N :

ليكن n من N ،

لدينا: $f(t)\leq 1$ لكل t من $[0\,;1]$.

إذن $t^n f(t)\leq t^n$ لكل t من $[0\,;1]$.

ومنه : $0\leq\int_0^1 t^n f(t)dt\leq\int_0^1 t^n dt$

وحيث أن $\frac{1}{n+1} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \int_0^1 t^n dt$ فإن $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ لكل n من N .

دد نهاية ا لمتتالية (I_n)

ا أن $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ لكل n من N و $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ فإن $\lim I_n = 0$) م هنة الدركي... احتراما وتقديرا !).

ا زء 3:

1.نبر أن $F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt$ لكل n من N و x من J :

ليكن n من N و x من $J = [0;1[$.لدينا :

$$F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^{n} F_k(x)$$

$$= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k f(t) dt$$

$$= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} t^k\right) f(t) dt$$

$$= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right) f(t) dt$$

$$= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} - \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right) f(t) dt$$

$$= \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt$$

ومنه :

$F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt$ لكل n من N و x من J .

2.أ.نبر أن الدالة $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعا على ال J:

الدالة $\varphi : x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ قابلة للإشتقاق على J حسب العمليات على الدوال القابلة للإشتقاق على ال

ولكل x من J لدينا : $\varphi'(x) = \ln(1-x)$

وحيث أن $x \in [0,1[$ فإن $\varphi'(x) \le 0$ أي أن φ تناقصية قطعا على J .

2.ب.نستنتج أن الدالة $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على $[0,x]$ حيث x عنصر من J .

ليكن x عنصرا من J .

لكل t من $[0,x]$ لدينا $\frac{f(t)}{1-t} = \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \frac{1}{\varphi(t)}$

وحيث أن φ تناقصية قطعا على $[0,x]$ ولاتنعدم عليه فإن $\frac{1}{\varphi}$ تزايدية قطعا على $[0,x]$.

ومنه :

الدالة $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على $[0,x]$ لكل x عنصر من J .

3.أ.نبر أن $0 \le F(x) - S_n(x) \le \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2}$ لكل n من N و x من J :

ليكن n من N و x من J ،

لدينا : $F(x)-S_n(x)=\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt$

لكل t من $[0,x]$ لدينا $0\le\frac{f(t)}{1-t}\le\frac{f(x)}{1-x}$ لأن الدالة $t\mapsto\frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على $[0,x]$.

ومنه $0\le\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\le\frac{t^{n+1}f(x)}{1-x}$ لكل t من $[0,x]$.

وبالتالي : $0\le\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\le\int_0^x \frac{t^{n+1}f(x)}{1-x}dt$

أي : $0\le\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\le\frac{1}{1-x}\int_0^x t^{n+1}dt$ لأن $f(x)\le 1$

ولدينا $\int_0^x t^{n+1}dt=\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x=\frac{x^{n+2}}{n+2}$.

و بما أن $x\in[0,1[$ فإن $\frac{x^{n+2}}{n+2}\prec\frac{1}{n+2}$ ومنه $0\le\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\le\frac{1}{1-x}\frac{1}{n+2}$.

وعليه فإن :

لكل n من N و x من J $0\le F(x)-S_n(x)\le\frac{1}{1-x}\frac{1}{n+2}$

3.ب نستنتج أن لكل x من J لدينا : $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$:

ليكن x من J ،

لكل n من N لدينا $0\le F(x)-S_n(x)\le\frac{1}{1-x}\frac{1}{n+2}$

وحيث أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-x}\frac{1}{n+2}=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$.

ومنه :

لكل x من J لدينا : $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$.

4.أ. حدد $F(x)$ من أجل $x\in J$:

ليكن x من J ، لدينا:

$$F(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt=\int_0^x \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))}dt=\int_0^x \frac{(1-\ln(1-t))'}{(1-\ln(1-t))}dt=\left[\ln\left|1-\ln(1-t)\right|\right]_0^x=\ln(1-\ln(1-x))$$

ومنه :

لكل x من J لدينا : $F(x)=\ln(1-\ln(1-x))$

4.ب. حدد النهاية $\lim_{x\to1^-}F(x)$:

لدينا $\lim_{x\to1^-}\ln(1-x)=\lim_{t\to0^+}\ln t=-\infty$ بوضع $t=1-x$

ومنه:

$\lim_{x\to1^-}F(x)=+\infty$.

wadiiifi@hotmail.com

وفقكم اللـــــــــــــــــــــه