تصحيح الامتحان الوطني الموحد 22 يونيو 2011
علوم رياضية أ و ب
ذ.محمد العباسي – نيابة خريبكة
elmed2006@yahoo.fr

التمرين الأول

الجزء الأول

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- لنبين بالترجع أن $A^{2k}=I$ $(\forall k\in\mathbb{N})$.

من أجل $k=0$ **لدينا** $A^{2.0}=A^0=I$

ليكن $k\in\mathbb{N}$ **، نفترض أن** $A^{2k}=I$ **، لنبين أن** $A^{2(k+1)}=I$ **. لدينا :**

$$A^{2(k+1)}=A^{2k}.A^2=I.A^2 \qquad (A^{2k}=I\ par\ H.R)$$
$$=A^2=I$$

2- بما أن $A^2=I$ **أي** $A.A=I$ **فإن** A **تقبل مقلوبا هو** A **نفسها.**

الجزء الثاني

$a\in\mathbb{R}$

$$\forall(x,y)\in I=]a,+\infty[\quad x*y=(x-a)(y-a)+a$$

1) أ. لنبين أن * قانون تركيب داخلي في I **:**

ليكن x **و** y **عنصرين من** I **، بما أن** $x\rangle a$ **و** $y\rangle a$ **فإن** $x-a\rangle 0$ **و** $y-a\rangle 0$ **ومنه** $(x-a)(y-a)+a\rangle a$
أي $x*y\in I$ **وبما أن**

$$(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x'\ et\ y=y'$$
$$\Rightarrow (x-a)(y-a)+a=(x'-a)(y'-a)+a$$
$$\Leftrightarrow x*y=x'*y'$$

فإن * قانون تركيب داخلي في I **.**

ب. لنبين أن * تبادلي و تجميعي : ليكن x **و** y **عنصرين من** I **، لدينا :**

$$x*y=(x-a)(y-a)+a=(y-a)(x-a)+a \quad \text{(لأن الضرب تبادلي في } \mathbb{R}\text{)}$$
$$= \quad y*x$$

إذن * تبادلي.

ليكن x **و** y **و** z **ثلاث عناصر من** I **، لدينا :**
(لأن الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$ **)**

$$(x*y)*z=\left[(x*y)-a\right]\left[z-a\right]+a=\left[\left((x-a)(y-a)\right)(z-a)\right]+a=\left[(x-a)\left((y-a)(z-a)\right)\right]+a$$
$$=\left[(x-a)\left((y*z)-a\right)\right]+a=x*(y*z)$$

إذن * تجميعي.

ج- لنبين أن $(I,*)$ **يقبل عنصرا محايدا.**

ليكن e **عنصرا من** I **، لدينا:**

$$e \text{ هو العنصر المحايد بالنسبة ل* في } I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\,x*e=x$$
$$\Leftrightarrow (\forall x\in I)\ (x-a)(e-a)+a=x$$
$$\Leftrightarrow (\forall x\in I)\ (x-a)\left(e-(a+1)\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e=a+1$$

وبما أن $a+1\rangle a$ فإن $a+1\in I$ وبالتالي $a+1$ هو العنصر المحايد ل* في I .

ج- لنبين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية.

بما أن * تبادلي و تجميعي ويقبل عنصرا محايدا في I هو $a+1$ بقي أن نبين أن كل عنصر من I يقبل مماثلا بالنسبة ل* في I. ليكن x و y عنصرين من I.

y هو مماثل x بالنسبة ل* $\Leftrightarrow x*y=a+1$

$$\Leftrightarrow (x-a)(y-a)+a=a+1$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(y-a)=1$$

$$\Leftrightarrow y-a=\frac{1}{x-a}\ (x\neq a)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{x-a}+a$$

وبما أن $\frac{1}{x-a}\rangle 0$ لأن $x\rangle a$ فإن $\frac{1}{x-a}+a\in I$ وبالتالي $\frac{1}{x-a}+a$ هو مماثل x بالنسبة ل* في I .

خلاصة: $(I,*)$ زمرة تبادلية.

-3

$$\varphi: I\to \mathbb{R}_+^*$$
$$x\to \frac{1}{x-a}$$

أ- لنبين أن φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

ليكن x و y عنصرين من I ، لدينا :

$$\varphi(x*y)=\frac{1}{(x-a)(y-a)}=\frac{1}{x-a}\times\frac{1}{y-a}=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

لنبين أن φ تقابل من I نحو $\mathbb{R}_+^*$ ، ليكن $y\in\mathbb{R}_+^*$ و $x\in I$ لدينا:

$$\varphi(x)=y\Leftrightarrow \frac{1}{x-a}=y$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}+a$$

وبما أن $y\rangle 0$ فإن $\frac{1}{y}+a\rangle 0$ وبالتالي فلكل $y\in\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $\varphi(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في I هو $\frac{1}{y}+a$

إذن φ تقابل من I نحو $\mathbb{R}_+^*$.

ب- إذا كان $a\rangle 0$ ، بما أن φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ فإن: $(\forall x\in I)\quad x^{(3)}=a^3+a\Leftrightarrow \varphi\left(x^{(3)}\right)=\varphi\left(a^3+a\right)$

$$\Leftrightarrow (\varphi(x))^3=\varphi(a^3+a)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-a}\right)^3=\left(\frac{1}{a}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a}=\frac{1}{a}\quad\left(\frac{1}{x-a}\rangle 0\ et\ \frac{1}{a}\rangle 0\right)$$

$$\Leftrightarrow x=2a$$

وبماأن $2a\in I$ فإن المعادلة المقترحة تقبل حلا وحيدا في I هو $2a$.

إذا كان $a\leq 0$ فإن $a^3+a\leq 0$ وبالتالي فالمعادلة لاتقبل أي حل في I لأنه $(\forall x\in I)\ x^{(3)}\in\mathbb{R}_+^*$

التمرين الثاني

$N=111...1$ (**2010** مرة **1**)

1) لنبين أن N يقبل القسمة على 11، لدينا $N=10^{2009}+10^{2008}+...+10^{1}+10^{0}$

وبما أن $10\equiv -1[11]$ **فإن**

$$\begin{aligned}N &\equiv (-1)^{2009}+(-1)^{2008}+...+(-1)^{1}+(-1)^{0}\,[11]\\ &\equiv -1+1-1+1+...-1+1\,[11]\\ &\equiv 0\,[11]\end{aligned}$$

(بما أن 2010 زوجي فالعدد 1 يتردد بقدر العدد1- في المجموع).

2) أ- لنتحقق أن 2011 أولي.

لدينا $\sqrt{2011}\approx 44,..$ **إذن الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي** $\sqrt{2011}$ **هي** $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43$.

وبما أن 2011 **لا يقبل القسمة على أي من هذه الأعداد فإنه أولي.**

لنتحقق أن $10^{2010}-1=9N$.

لدينا :

$$\begin{aligned}10^{2010}-1 &= (10-1)\left(10^{2009}+10^{2008}+...10^{1}+10^{0}\right)\\ &= 9N\end{aligned}$$

ب- لنبين أن 2011 **يقسم** $9N$، **لدينا** 2011 **أولي و** $2010\wedge 2011=1$ **(عددين طبيعيين متتابعين) ومنه حسب مبرهنة فيرما:**

$10^{2011-1}\equiv 1[2011]$ **أي** $10^{2010}-1\equiv 0[2011]$ **وبما أنه حسب السؤال السابق** $10^{2010}-1=9N$ **فإن** $9N\equiv 0[2011]$

أي $2011/9N$.

ج- بما أن $2011/9N$ **و** $2011\wedge 9=1$ **(لأن** $1=4\times 503+2011\times(-1)$ **) فإنه حسب مبرهنة كوص** $2011/N$.

3- لنبين أن $22121/N$ **، بما أن** $2121=11\times 2011$ **و** $2011/N$ **و** $11/N$ **و** $2011\wedge 11=1$ **(لأن** $1=11\times(914)+(-914)\times\ldots$ $(5\times 2011+(-914)\times 11=1$ **)**

فإن $22121/N$.

التمرين الثالث

الجزء الأول

$m\in\mathbb{C}^{*}$ **نعتبر المعادلة :** $(E_m): z^{2}+\left[(1-i)m-4\right]z-im^{2}-2(1-i)m+4=0$

1- لنتحقق أن $z_1=-m+2$ **حل ل** (E_m) .

لدينا

$$\begin{aligned}&(-m+2)^{2}+\left[(1-i)m-4\right](-m+2)-im^{2}-2(1-i)m+4\\ &=4-4m+m^{2}-m^{2}(1-i)+4m+2(1-i)m-8-im^{2}-2m+2im+4=0\end{aligned}$$

إذن $z_1=-m+2$ **حل ل** (E_m) .

2- ليكن z_2 **الحل الثاني**

ا- لنبين أن $z_1z_2=1\Leftrightarrow im^{2}+2(1-i)m-3=0$

بما أن z_1 **و** z_2 **هما جدري المعادلة** (E_m) **فإن** $z_1z_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-im^{2}-2(1-i)m+4}{1}=-im^{2}-2(1-i)m+4$

إذن $z_1z_2=1\Leftrightarrow im^{2}+2(1-i)m-3=0$.

ب- لدينا:

$$z_1z_2=1\Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$$
$$\Leftrightarrow\left[(1-i)m-2\right]^2=-2$$
$$\Leftrightarrow(1-i)m-2=i\sqrt{2}\quad ou\quad (1-i)m-2=-i\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{2+i\sqrt{2}}{1-i}\quad ou\quad m=\frac{2-i\sqrt{2}}{1-i}$$
$$\Leftrightarrow m=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\quad ou\quad m=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

الجزء الثاني

$$S(M(z))=M'(z')\quad\Leftrightarrow\quad z'-1=-(z-1)$$
$$R(M(z))=M''(z'')\quad\Leftrightarrow\quad z''-(1+i)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-(1+i))\quad ،\quad R=r\left(\Omega(1+i),\frac{\pi}{2}\right)$$

1) أ- لنبين أن S هو التماثل المركزي الذي مركزه $I(1)$

لدينا $S(M(z))=M'(z')\quad\Leftrightarrow\quad z'-1=-(z-1)$
$$\Leftrightarrow\quad IM'=-IM$$
وبالتالي $S=S_I$ **.**

ب- لنبين أن $z''=iz+2$
لدينا :

$$R(M(z))=M''(z'')\quad\Leftrightarrow\quad z''-(1+i)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-(1+i))$$
$$\Leftrightarrow z''=1+i+i(z-(1+i))$$
$$\Leftrightarrow z''=iz+2$$

-2 $M\neq O$ **و** $A(2)$

أ- لدينا: $\dfrac{z''-2}{z'-2}=\dfrac{iz}{-z}=-i$

لدينا $$\frac{z''-2}{z'-2}=-i\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}AM''=AM'\\ \overline{\left(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''}\right)}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$

وبالتالي المثلث $AM'M''$ **متساوي الساقين وقائم الزاوية في** A **.**

ب- نضع $z=x+iy$ **حيث** $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

A **و** Ω **و** M' **و** M'' **متداورة** $\Leftrightarrow\quad\dfrac{z_{M'}-z_\Omega}{z_{M''}-z_\Omega}\div\dfrac{z_{M'}-z_A}{z_{M''}-z_A}\in\mathbb{R}$
$$\Leftrightarrow\frac{-z+1-i}{iz+1-i}\div\frac{-z}{iz}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\frac{-z+1-i}{-z+i+1}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\frac{-z+1-i}{-z+i+1}=\overline{\left(\frac{-z+1-i}{-z+i+1}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z+\bar{z}-2=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$
وبالتالي مجموعة النقط $M(z=x+iy)$ **بحيث** A **و** Ω **و** M' **و** M'' **متداورة هي المستقيم ذو المعادلة** $x=1$ **.**

التمرين الرابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln x} & si\ \ x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$$

1- لدينا :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\right)\ \ e^x=x^n \Leftrightarrow e^x=e^{n\ln x}$$
$$\Leftrightarrow x=n\ln x$$
$$\Leftrightarrow n=f(x)$$

2- لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=0\in\mathbb{R}$$

إذن f **قابلة للاشتقاق على اليمين عند** 0 **و** $f'_d(0)=0$

-3 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$ **(لأن** $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x=0^+$ **و** $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x=0^-$ **)**

إذن (C) **يقبل المستقيم ذو المعادلة** $x=1$ **كمقارب عمودي بجوار** 1**.**

و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\ln x}{x}}=+\infty$ **(لأن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$ **)**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$ **(لأن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ **)**

إذن (C) **يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار** $+\infty$ **.**

-4 لدينا f **قابلة للاشتقاق على كل من المجالين** $]0,1[$ **و** $]1,+\infty[$ **(خارج دالتين قابلتين للاشتقاق) ولدينا**

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right)$ **وبالتالي فإشارة** $f'(x)$ **هي نفس إشارة** $\ln x-1$

إذن f **تناقصية قطعا على كل من المجالين** $]0,1[$ **و** $]1,e]$ **و تزايدية قطعا على المجال** $[e,+\infty[$

جدول تغيرات f

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\mathbf{0}$	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

-5 لدينا $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{(\ln x)^2}$ $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right)$

لدينا الدالة f' **ق.ش على كل من المجالين** $]0,1[$ **و** $]1,+\infty[$ **(لأن الدالة** $\ln$ **ق.ش ولا تنعدم على كل من المجالين** $]0,1[$ **و** $]1,+\infty[$ **)**

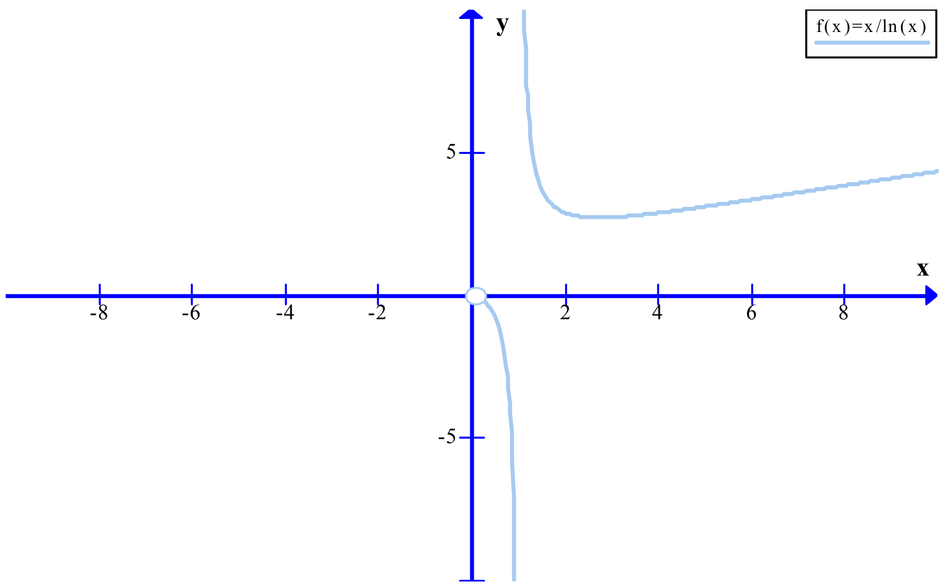
ولدينا $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right)$ $f''(x)=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}+\dfrac{2\frac{1}{x}\ln x}{(\ln x)^4}=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$

جدول تقعر (C)

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
(C)			$\|$		Pt d'inflexion		

من خلال الجدول أعلاه نستنتج أن (C) يقبل نقطة انعطاف عند النقطة ذات الاحداثيات $\left(e^2,\frac{e^2}{2}\right)$.

6- انشاء (C) **: سهل جدا ، اترك مسألة إتمامه للقارئ الكريم**



7- ليكن $n\ge 3$ ، لنبين أن المعادلة (E) تقبل على مجموعة تعريفها بالضبط حلين a_n و b_n بحيث $1<a_n<e<b_n$.

بما أن $(\forall x\in[0,1[)\ f(x)\le 0$ و $n\ge 3$ فإن المعادلة لاتقبل أي حل في المجال $[0,1[$ ، على المجال $]1,e]$ الدالة متصلة وتناقصية قطعا إذن فإنها تقابل من المجال $]1,e]$ نحو المجال $f(]1,e[)=]e,+\infty[$ وبما أن $n\in]e,+\infty[$ فإنه $(\exists! a_n\in]1,e[)/f(a_n)=n$ على المجال $]e,+\infty[$ الدالة متصلة وتزايدية قطعا إذن فإنها تقابل من المجال $]e,+\infty[$ نحو المجال $f(]e,+\infty[)=]e,+\infty[$ وبما أن $n\in]e,+\infty[$ فإنه $(\exists! b_n\in]e,+\infty[)/f(b_n)=n$ ولدينا $f(e)=e<n$ ، إذن المعادلة (E) تقبل على مجموعة تعريفها بالضبط حلين a_n و b_n بحيث $1<a_n<e<b_n$.

الجزء الثاني

1- لنبين أن $(\forall n\ge 3)\ b_n\ge n$

ليكن $n\ge 3$ ، لدينا $b_n-n=b_n-f(b_n)=b_n-\frac{b_n}{\ln b_n}=b_n\left(\frac{\ln b_n-1}{\ln b_n}\right)$

وبما أن $b_n>e$ فإن $b_n\left(\frac{\ln b_n-1}{\ln b_n}\right)>0$ ومنه $b_n-n>0$ أي $b_n>n$.

بما أنه $(\forall n\ge 3)\ b_n\ge n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$.

2)أ- لنبين أن $(a_n)_{n\ge 3}$ تناقصية

ليكن $n\ge 3$ ، لدينا $f(a_n)=n$ و $f(a_{n+1})=n+1$ وبما أن $n<n+1$ فإن $f(a_n)<f(a_{n+1})$ وبما a_n و a_{n+1} عنصرين من $]1,e[$ و f تناقصية قطعا على $]1,e[$ فإن $a_{n+1}<a_n$ وبالتالي المتتالية $(a_n)_{n\ge 3}$ تناقصية قطعا.

بما أن $(a_n)_{n\ge 3}$ تناقصية ومصغورة ب **1** فإنها متقاربة.

ب- لنبين أن $(\forall n\geq 3)\ \frac{1}{n}\langle\ln(a_n)\langle\frac{e}{n}$

ليكن $n\geq 3$ ، لدينا $f(a_n)=n\Leftrightarrow\frac{a_n}{\ln a_n}=n\Leftrightarrow \ln a_n=\frac{a_n}{n}$ وبما أن $1\langle a_n\langle e$ فإن $\frac{1}{n}\langle\ln(a_n)\langle\frac{e}{n}$.

بما أن $(\forall n\geq 3)\ \frac{1}{n}\langle\ln(a_n)\langle\frac{e}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n}=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\ln a_n=0$ وبما أن الدالة $\exp$ متصلة عند 0 فإن $\lim_{n\to+\infty}\exp(\ln a_n)=\exp(0)$ أي $\lim_{n\to+\infty}a_n=1$.

ج- لنبين أن $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^n=1$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln(a_n)}=\lim_{n\to+\infty}\exp(a_n)=\exp(1)=e$ (لان $n\ln a_n=a_n$ و $\lim_{n\to+\infty}a_n=1$ والدالة $\exp$ متصلة عند 1)

التمرين الخامس

$$(\forall x\in[0,+\infty[)\quad F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

1)أ- لنبين أن $(\forall x\geq 0)\quad 0\leq F(x)\leq xe^{-x^2}$

بماأن $(\forall x\geq 0)(\forall t\in[0,x])\ -x^2\leq -t^2\leq 0$ والدالة $\exp$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $(\forall x\geq 0)(\forall t\in[0,x])\quad e^{-x^2}\leq e^{-t^2}\leq 1$

إذن $(\forall x\geq 0)\quad \int_0^x e^{-x^2}dt\leq\int_0^x e^{-t^2}dt\leq\int_0^x 1dt$ أي $(\forall x\geq 0)\quad xe^{-x^2}\leq\int_0^x e^{-t^2}dt\leq x$ وبما أن $(\forall x\geq 0)\quad e^{-x^2}\geq 0$ فإن

$(\forall x\geq 0)\quad 0\leq F(x)\leq xe^{-x^2}$

ب- لنبين أن $(\forall x\geq 1)\quad e^{-x^2}\leq e^{-x}$

بما أنه $(\forall x\geq 1)\quad -x^2\leq -x$ والدالة $\exp$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $(\forall x\geq 1)\quad e^{-x^2}\leq e^{-x}$

بما أنه $(\forall x\geq 1)\quad e^{-x^2}\leq e^{-x}$ و $(\forall x\geq 1)\quad x\rangle 0$ فإنه $(\forall x\geq 1)0\ \langle\ xe^{-x^2}\leq xe^{-x}$ وبما أن $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x^2}=0$

وبما أن $(\forall x\geq 0)\quad 0\leq F(x)\leq xe^{-x^2}$ فإن $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$.

2) بما أن الدالة : $t\to e^{-t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ وعلى الخصوص على $[0,+\infty[$ فإن الدالة $\varphi:x\to\int_0^x e^{-t^2}dt$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$

وبالتالي F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0,+\infty[$) $F(x)=e^{-x^2}\varphi(x)$. ولدينا

$$(\forall x\geq 0)F'(x)=\left(e^{-x^2}\varphi(x)\right)'=\left(e^{-x^2}\right)'\varphi(x)+e^{-x^2}\varphi'(x)=-2xe^{-x^2}\varphi(x)+e^{-x^2}e^{-x^2}=e^{-2x^2}-2xF(x)$$

3)

$$\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\quad G(x)=\begin{cases}F(\tan x)\ ,\ si\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 0\ ,\ si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

أ- لنبين أن G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

لدينا $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan(x)=+\infty$ وبما أن $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$ فإن $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}G(x)=0=G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ وبالتالي G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

ب- لنبين أن $(\exists c\in]0,+\infty[)\ /\ F'(c)=0$

من أجل ذلك نطبق مبرهنة رول على G في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

لدينا G متصلة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ (لأن الدالة $\tan$ متصلة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $\tan\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$ والدالة F متصلة على $[0,+\infty[$)

ولدينا G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$ إذن G متصلة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ، ولدينا G ق.ش على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (لإن الدالة $\tan$ ق.ش على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $\tan\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,+\infty[$ والدالة F ق.ش على $]0,+\infty[$) و $G(0)=G\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

إذن حسب مبرهنة رول $\left(\exists c_1\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\ /\ G'(c_1)=0$

وبما أن $G'(x)=F'(\tan x).\frac{1}{1+x^2}$ فإن $F'(\tan c_1)=0$ وبالتالي $\left(\exists c\in]0,+\infty[\right)\ /\ F'(c)=0$ يكفي أن نأخذ $c=\tan c_1$.

بما أن $(\forall x\geq 0)\ F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$ فإن $F'(c)=0\Leftrightarrow e^{-2c^2}=2cF(c)\Leftrightarrow F(c)=\frac{1}{2c}e^{-c^2}$.

-4 $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\ H(x)=F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

أ- لنبين أن H تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

بما أن $(\forall x\rangle 0)\ F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$ فإن $(\forall x\rangle 0)\ H(x)=\frac{1}{2x}e^{-x^2}-e^{x^2}F(x)=\frac{1}{2x}e^{-x^2}-\varphi(x)$

لدينا الدالة $x\to\frac{1}{2x}e^{-x^2}$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ كجداء دالتين تناقصيتين قطعا وموجبتين قطعا على $]0,+\infty[$ والدالة $-\varphi$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ (لان $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\ (-\varphi)'(x)=-e^{x^2}\langle 0$) وبالتالي الدالة H تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ (كمجموع دالتين تناقصيتين قطعا على $]0,+\infty[$).

ب- نلاحظ أن $F'(c)=0\Leftrightarrow H(c)=0$ وبما أن H تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ فإن المعادلة $H(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]0,+\infty[$ وبالتالي فالعدد c وحيد. إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $H(x)$ وبما أن H تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ و $H(c)=0$ فإن $\left(\forall x\in]0,c[\right)\ H(x)\rangle 0$ و $\left(\forall x\in]c,+\infty[\right)\ H(x)\langle 0$ وبالتالي نستنتج الجدول التالي:

<u>جدول تغيرات</u> F

x	**0**	c	$+\infty$
$F'(x)$	+	**0**	-
$F(x)$	0	$F(c)$	0

مرحبا بأي ملاحظة أو اقتراح وشكرا

ذ.محمد العباسي

elmed2006@yahoo.fr